



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

MARCIANO ARAÚJO SANTANA

**PROPOSTA DE ABORDAGEM DO TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO NA
FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA (EAD) COM O USO DO GEOGEBRA**

FORTALEZA

2015

MARCIANO ARAÚJO SANTANA

**PROPOSTA DE ABORDAGEM DO TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO NA
FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA (EAD) COM O USO DO GEOGEBRA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro de Ciências, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Rogério Santana

**FORTALEZA
2015**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

-
- S223p Santana, Marciano Araújo
Proposta de abordagem do teorema do ângulo externo na formação continuada de professores de matemática da educação a distância (EAD) com o uso do Geogebra / Marciano Araújo Santana. – 2015.
99 f. : il., enc.; 31 cm
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Rogério Santana.
1. Construções geométricas. 2. Software Geogebra. 3. Aprendizagem. I. Título.

MARCIANO ARAÚJO SANTANA

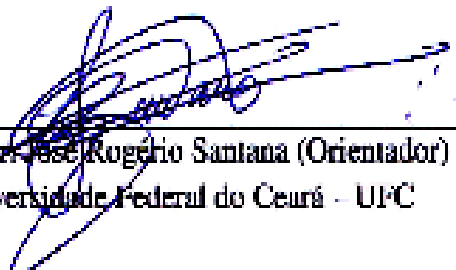
PROPOSTA DE ABORDAGEM DO TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO NA
FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO
À DISTÂNCIA (EAD) COM O USO DO GEOGEBRA.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.


Orientador: Prof. Dr. José Rogério Santana

Aprovada em: 27/01/2015


BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. José Rogério Santana (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC



Prof. Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará - UFC



Prof. Dr. Antônio Luiz de Oliveira Barreto
Universidade Estadual do Ceará - UECE

“Educar é um dom concebido aqueles que se doaram à missão e que, portanto receberão de Deus a sabedoria para que com lealdade cumpram a tarefa de cultivar mentes abertas e independentes”. (Autor desconhecido)

A Deus.

Aos meus pais, esposa, filho e amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador professor Dr. Rogério Santana, que depositou confiança no meu trabalho e reconheceu a minha dedicação em meio a tanta dificuldade para torná-lo possível de se realizar.

Aos professores Dr. Antônio Luis de Oliveira Barreto e Dra. Maria José Costa dos Santos por aceitarem compor a banca examinadora e contribuírem com suas valiosas sugestões para melhoria desse trabalho.

Aos professores Dr. Othon e Dra. Imiracy por terem contribuído na qualificação desse trabalho com suas intervenções e colocações que fizeram enriquecê-lo ainda mais.

À minha família, pai, mãe, irmãos, tios e sobrinhos pelos incentivos depositados que me encorajaram a chegar a este momento.

À minha esposa, Dayana Carla que tanto me incentivou e com paciência conseguiu entender a importância da minha dedicação a este trabalho quando estávamos enfrentando momentos difíceis.

Ao meu querido filho Pedrinho, um presente de Deus que nasceu durante a construção desse trabalho e que sem saber, conseguiu me encorajar para que eu pudesse me dedicar cada vez mais para concluí-lo.

A Coordenação, Secretaria e professores que não mediram esforços durante a trajetória do Mestrado Profissionalizante ENCIMA, ensinando e orientando o grupo a acreditar no desejo de descobrir o novo e que isto seria possível com coragem e dedicação.

Aos meus colegas professores em especial a Prof.^a Valdiana Miranda que fez a correção ortográfica desse trabalho, aos funcionários e membros do Núcleo Gestor da EEM Julia Alenquer Fontenele na qual sou diretor, pelo incentivo, apoio e compreensão na construção desta dissertação.

Ao meu colega professor Ms. Marcos Silvano que me deu apoio e orientação durante a pesquisa realizada na turma em que o mesmo ministrava aula, buscando integrá-los a fazerem parte de um trabalho acadêmico.

Aos professores que participaram diretamente da construção do trabalho como estudantes do curso semipresencial de formação continuada de metodologia do ensino de matemática que dedicaram seu tempo para que tivéssemos uma conclusão significativa a respeito da pesquisa.

RESUMO

O uso da geometria no dia a dia das pessoas tem importância significativa por ser um assunto que utiliza desenhos, formas e teoremas como elementos de estudos para comprovar sua atuação nos mais diversos campos da sociedade tais como engenharias, siderúrgicas, arquiteturas, topografias, etc. Neste contexto, podemos afirmar que construções geométricas propiciam a descoberta de valiosas ideias que auxiliam à compreensão das propriedades geométricas. As avaliações em larga escala apresentadas nos indicadores da educação pública no Estado do Ceará retratam claramente as dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos quando relacionados aos conceitos geométricos especificamente o teorema do ângulo externo tanto na teoria (conceito algébrico) como na prática (conceito geométrico). A partir desta análise, propomos realizar uma investigação através da presente pesquisa que conseguisse identificar possíveis entraves existentes no ensino de geometria para que pudesse obter avanços que visam melhorar no ensino relacionado ao Teorema do Ângulo Externo e suas Consequências usando os ambientes de aprendizagens Velho Papel e Caneta (VPC) e o Ambiente virtual de Aprendizagem (AVA) com a operacionalidade do software educativo de geometria dinâmica *GeoGebra*. O trabalho teve a participação de um grupo de 12(doze) professores de matemática em formação continuada de um Curso de Especialização no Ensino de Matemática da Universidade Vale do Acaraú (UVA) na cidade de Cascavel-Ce. O uso operacional e pedagógico do software de geometria dinâmica *GeoGebra* foi aplicado em aulas expositivas com questionários de problemas envolvendo o teorema do ângulo externo que busca avaliar o desempenho dos estudantes participantes da pesquisa em relação suas práticas de sala de aula com o ensino de geometria. Adotamos abordagens qualitativa, exploratória e pesquisa-ação para caracterizar a pesquisa e buscamos tomar como base os pressupostos teóricos e reflexivos segundo as concepções de Valente, Michele Artigue, Pais e Fiorentini e Lorenzato. A pesquisa revelou avanços no processo de aprendizagem dos estudantes participantes que se mostraram entusiasmados com os conhecimentos que construíram e que os possibilitou estabelecerem um relacionamento colaborativo entre os grupos envolvidos (estudantes e professor-pesquisador)

Palavras-Chave: Construções geométricas. Software de geometria dinâmica. Teorema do ângulo externo.

ABSTRACT

The use of geometry in everyday life people have significant importance because it is a subject that uses designs, shapes and theorems as studies of evidence to make its activities in various fields of society such as engineering, steel, architecture, topography, etc. In this context, we can say that geometric constructions provide the discovery of valuable ideas that help the understanding of geometric properties. The large-scale assessments presented in public education indicators in the State of Ceara clearly portray the difficulties of learning by students when related to geometric concepts specifically the exterior angle theorem in theory (algebraic concept) and in practice (geometric concept). From this analysis, we propose to conduct an investigation through this research that could identify possible barriers in existing geometry teaching so he could obtain advances to improve the teaching related to the External Angle Theorem and its Consequences using the old learning environments and Paper pen (VPC) and the virtual Learning Environment (VLE) with the operation of educational software of dynamic geometry GeoGebra. The work was attended by a group of twelve (12) mathematics teachers in continuing education of a Specialization Course in Teaching of Mathematics at the University Vale do Acaraú (UVA) in the city of Cascavel-Ce. The operational and pedagogical use of dynamic geometry software GeoGebra was applied in lectures with questionnaires problems involving the exterior angle theorem that seeks to assess the performance of students participating in the survey regarding their classroom practices with the teaching of geometry. We adopted a qualitative, exploratory and action research approaches to characterize the research and seek to build on the theoretical and reflexive assumptions according to Valente conceptions, Michele Artigue, Parents and Fiorentini and Lorenzato. The survey showed progress in the learning process of participating students that were excited by the knowledge that built and that allowed establish a collaborative relationship between the groups involved (students and teacher-researcher).

Keywords: Geometric constructions. Dynamic geometry software. Theorem the external angle.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 - Estrutura da dissertação em capítulos representada num mapa conceitual.....	16
FIGURA 2 - Registro da Interface da tela inicial do Software GeoGebra apresentando os ícones de trabalho a serem usados pelos estudantes para realizar as atividades da pesquisa.....	38
FIGURA 3 - Triângulo ABC apresentando seus ângulos externos relativos aos seus vértices.....	39
FIGURA 4 - Triângulo ABC como base da demonstração do teorema do ângulo externo...	40
FIGURA 5 - Triângulo ABC como base da demonstração do Teorema 2.....	40
FIGURA 6 - Feixe de retas paralelas r e s.....	41
FIGURA 7 - Reta r contendo os pontos A e B com os pontos P e P' não pertencentes a r...	42
FIGURA 8 - Reta r cortada pelas retas s e s' concorrentes em P e perpendiculares a r em Q e R respectivamente.....	43
FIGURA 9 - Reta r e a transformação por reflexão dos pontos P e Q.....	44
FIGURA 10 - Triângulo ABC com D ponto médio de BC.....	45
FIGURA 11 - Triângulo ABC com prolongamento BD de AB sob condições convenientes.....	46
FIGURA 12 - Construção por régua e compasso das circunferências C e C' a partir da reta r.....	47
FIGURA 13 - Triângulo ABC com ângulos internos α' e β' e ângulos externos α e β	48
FIGURA 14 - Reta r contendo os pontos P ₀ e A, e P externo a r.....	49
FIGURA 15 - Registro da aula expositiva sobre o Teorema do Ângulo Externo aplicada pelo professor-pesquisador sala de aula durante o 2º encontro da prática pedagógica da pesquisa.....	68
FIGURA 16 - Registro da resolução da questão 1 retirado do caderno da dupla 1.....	69
FIGURA 17 - Registro da resolução da questão 4 retirado do caderno da dupla 1.....	70
FIGURA 18 - Registro da resolução da questão 5 retirado do caderno da dupla 1.....	70
FIGURA 19 - Registro da resolução da questão 1 retirado do caderno da dupla 2.....	71
FIGURA 20 - Registro da resolução da questão 2 retirado do caderno da dupla 2.....	71
FIGURA 21 - Registro da resolução da questão 3 retirado do caderno da dupla 2.....	71
FIGURA 22 - Registro da resolução da questão 4 retirado do caderno da dupla 3.....	72

- FIGURA 23** - Registro da solução encontrada para a primeira questão do questionário 2 (Apêndice B) pela dupla 3 durante o 4º encontro da prática pedagógica da pesquisa no laboratório de informática..... **74**
- FIGURA 24** - Registro da solução encontrada para a segunda questão do questionário 2 (Apêndice B) pela dupla 4 durante o 4º encontro da prática pedagógica da pesquisa no laboratório de informática..... **75**
- FIGURA 25** - Registro da solução encontrada para a terceira questão do questionário 2 (Apêndice B) pela dupla 4 durante o 4º encontro da prática pedagógica da pesquisa no laboratório de informática..... **76**
- FIGURA 26** - Registro da solução encontrada da questão 4 do questionário 2 (Apêndice B) por uma das duplas durante o 4º encontro da prática pedagógica da pesquisa no laboratório de informática..... **78**
- FIGURA 27** - Registro da solução encontrada da questão 5 do questionário 2 (Apêndice B) por uma das duplas durante o 4º encontro da prática pedagógica da pesquisa no laboratório de informática..... **79**

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1** – Respostas dos estudantes às questões relativas ao sexo, idade e tempo de profissão no campo educacional (dados coletados do questionário – Apêndice A)..... **63**
- Tabela 2** – Respostas dos estudantes às questões objetivas quanto ao conhecimento e utilização da geometria nas aulas em destaque o Teorema do Ângulo Externo (dados coletados do questionário – Apêndice A)..... **64**
- Tabela 3** – Respostas dos estudantes às questões objetivas quanto ao uso do computador como ferramenta pedagógica e conhecimento de software de geometria dinâmica (dados coletados do questionário – Apêndice A)..... **65**

LISTA DE SIGLAS

EAD - Educação a Distância

AVA - Ambiente Virtual de Aprendizagem

VPC – Velho Papel e Caneta

UVA - Universidade Vale do Acaraú

EA - Engenharia Didática

TIC - Tecnologias da Informação e Comunicação

PUCRS - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

EM – Educação Matemática

PIBID – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência

URI – Universidade Regional Integrada

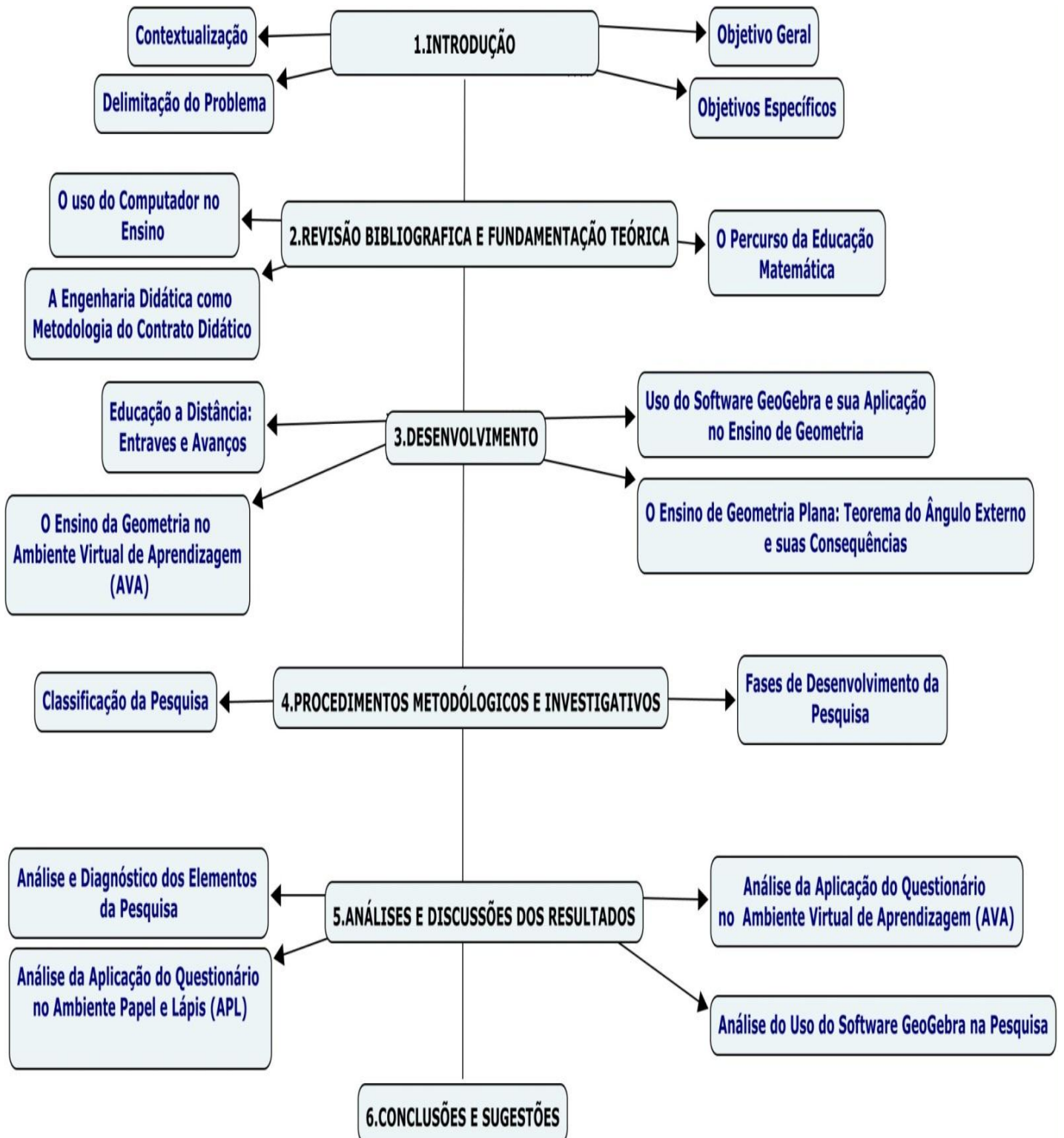
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Contextualização do problema	17
1.2	Delimitação do problema	18
1.3	Objetivos	20
1.3.1	<i>Objetivos gerais</i>	20
1.3.2	<i>Objetivos específicos</i>	20
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	22
2.1	O uso do computador no ensino	22
2.2	A Engenharia Didática como metodologia do Contrato Didático	23
2.3	O percurso da educação matemática	26
3	DESENVOLVIMENTO	29
3.1	Educação a distância: entraves e avanços	29
3.2	O ensino da geometria no ambiente virtual de aprendizagem (AVA)	32
3.3	Uso do software Geogebra e sua aplicação no ensino da geometria	35
3.3.1	<i>Análise do software Geogebra</i>	36
3.4	O ensino de geometria plana: teorema do ângulo externo e suas conseqüências	38
3.4.1	<i>Situando a temática</i>	38
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E INVESTIGATIVOS	50
4.1	Classificação da pesquisa	50
4.1.1	<i>Quanto à natureza abordada</i>	51
4.1.2	<i>Quanto ao problema pesquisado</i>	51
4.1.3	<i>Quanto aos objetivos</i>	51
4.1.4	<i>Quanto aos procedimentos técnicos</i>	52
4.2	Fases de desenvolvimento da pesquisa	54
4.2.1	<i>Investigação na tipologia dos problemas geométricos no AVA</i>	54
4.2.2	<i>Elaboração do contrato didático adotado para a pesquisa</i>	55
4.2.3	<i>Construção do plano de pesquisa e das sessões didáticas</i>	56
4.2.4	<i>Procedimentos didáticos realizados no ambiente papel e lápis (APL)</i>	57
4.2.5	<i>Procedimentos didáticos realizados no ambiente virtual de aprendizagem</i>	58

	(AVA)	
5	ANÁLISE E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS	62
5.1	Análise e diagnóstico dos elementos da pesquisa	62
5.2	Análise da aplicação do questionário no ambiente papel e lápis (APL)	66
5.3	Análise da aplicação do questionário no ambiente virtual de aprendizagem (AVA)	72
5.4	Análise do uso do software Geogebra na pesquisa	79
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	83
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DA PRIMEIRA ETAPA DA PRÁTICA PEDAGÓGICA	87
	APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO DA SEGUNDA ETAPA DA PRÁTICA PEDAGÓGICA	90
	APÊNDICE C – FOTOS DOS ALUNOS DURANTE O PERCURSO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA	92
	ANEXO A- GUIA DAS AULAS DA PRÁTICA PEDAGÓGICA DA PESQUISA	95

ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

FIGURA 1: Estrutura da dissertação em capítulos representada num mapa conceitual.



Fonte: Próprio autor

1. INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização do Problema

A essência da Matemática é investigar, coletar, apresentar e interpretar dados cabíveis a comprovações. Em particular, a geometria utiliza desenhos, formas e teoremas como elementos de estudos para tais comprovações. Construções geométricas propiciam a descoberta de valiosas ideias que auxiliam a compreensão das propriedades geométricas (IMENES E LELLIS, 2001).

Para alguns estudiosos que se dedicam ao estudo de geometria, sua aplicabilidade prática permite um melhor entendimento do estudo de matemática, pois associa conceitos matemáticos à visualização e manuseio, condição necessária para seu domínio e compreensão (LENOAR ELOI E JOSE RICARDO, 2008).

Ambientes de geometria dinâmica permitem aos estudantes criarem construções geométricas e manipulá-las facilmente, movendo livremente certos elementos de um desenho e observando outros que correspondem às condições alteradas (GOLDENBERG, SCHER E FEURZEIG, 2008).

Em concordância às condições mostradas acima, recomendamos prática de um trabalho a ser desenvolvido na turma de Especialização no Ensino de Matemática em formação continuada com 12 de professores de matemática num curso de Educação a Distância (EAD) utilizando o caderno/folha acompanhado de caneta/lápis que chamaremos de Velho Papel e Caneta (VPC)¹ e o laboratório de informática que será denominado de Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) com a operacionalidade do *software* educacional GeoGebra² para apresentar o Teorema do Ângulo Externo e suas Consequências para que venha proporcionar aos professores uma reflexão sobre o ensino de matemática limitando-se a geometria plana, a efetivação desse conteúdo no currículo escolar e condições para apresentar teoremas e proposições de forma claras utilizando recursos visuais e geométricos num ambiente de Geometria Dinâmica.

Propomos realizar a presente pesquisa neste campo da geometria por não haver trabalhos com esta estrutura que utilize o *software* GeoGebra como ferramenta de apoio peda-

¹ A expressão VPC é usada neste trabalho como referência a Tese do Professor Dr. José Rogério Santana

² No Capítulo 3 será definido como ocorre o uso do *software* GeoGebra no ensino de Geometria.

gógico que seja explorado em problemas que envolvam o objeto em estudo e possibilite os professores inferir sobre suas práticas pedagógicas de sala de aula.

Neste processo enfatizaremos a Engenharia Didática³ nas concepções de Michèle Artigue como proposta teórico-metodológica que tem o objetivo de refletir os processos de ensino e de aprendizagem da matemática num tema de geometria plana usando as tecnologias digitais.

De acordo com os professores da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS) que desenvolveram um trabalho nesta perspectiva, a utilização de tecnologia no ensino e na aprendizagem pode trazer melhorias bastante significativas para a educação (KAREN, VALDEREZ E REGIS, 2012, p.55). Reforçamos ainda, com as palavras de Sérgio Lorenzato:

“Pesquisas psicológicas indicam que a aprendizagem geométrica é necessária ao desenvolvimento da criança, pois inúmeras situações escolares requerem percepção espacial, tanto em matemática (por exemplo: algoritmos, medições, valor posicional, séries, sequências...) como na leitura e escrita”. Ela é uma das melhores oportunidades para aprender a matematizar a realidade, já que as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. (LORENZATO, 1998).

Contudo percebemos que a geometria permite um melhor entendimento do estudo de matemática, pois associa conceitos matemáticos à visualização e manuseio, condição necessária para seu domínio e compreensão.

1.2 Delimitação do Problema

O presente trabalho se propôs investigar a influência que o software de Geometria Dinâmica (GeoGebra) é capaz de potencializar como ferramenta metodológica adotada para o ensino de Geometria nessa pesquisa para o objeto Teorema do Ângulo Externo e suas Consequências.

Para a realização desta investigação será realizada uma pesquisa de campo de natureza descritiva e qualitativa numa turma de 12 (doze) professores em formação continuada do Curso Semipresencial de Especialização no Ensino de Matemática da modalidade Educação à Distância (EAD) da Universidade Vale do Acaraú da cidade de Cascavel-Ce.

³ No Capítulo 3 apresentamos a Metodologia Engenharia Didática

A necessidade de apresentar uma pesquisa de natureza qualitativa se dar ao fato da tradução daquilo que não pode ser mensurável, uma vez que a realidade e o sujeito são elementos indissociáveis. Desta forma, quando se trata do sujeito, levam-se em consideração seus traços subjetivos e suas particularidades. Tais detalhes não podem ser traduzidos em números quantificáveis.

Pelo percurso histórico do ser humano, vários recursos foram utilizados para resolver problemas e atingir fins específicos de sobrevivência. O uso da tecnologia foi resultado da capacidade humana para tais fins. Como afirma Pierre Levy (1996, p. 16-17):

[...] o virtual não se opõe ao real, mas sim ao atual. Contrariamente ao possível, estático e já constituído, o virtual é como o complexo problemático, o nó de tendência ou de forças que acompanha uma situação, um acontecimento, um objeto ou uma entidade qualquer, e que chama um processo de resolução: a atualização.

Nessa perspectiva, propõe-se nesta pesquisa realizar uma investigação durante 5(três) encontros com duração de 4(quatro) horas/aulas cada em intervalos de 15 (quinze) dias entre eles utilizando dois ambientes distintos de aprendizagem VPC e AVA usando o GeoGebra como ferramenta pedagógica para que possa possibilitar ao estudantes⁴ mecanismos diversificados de saberes a serem transmitidos e estratégias didáticas inovadoras. Com o uso do software GeoGebra existem pretensões de uma exploração do conceito de geometria plana Teorema do Ângulo Externo e suas Consequências, em apresentar soluções para problemas que são, em sua maioria, resolvidos no velho papel e caneta para o ambiente virtual, na tentativa de avaliar neste processo uma visão geométrica e rapidez na solução do problema apresentado.

Na formação de professores o ensino de matemática o uso de tecnologias digitais tem sido necessidade fundamental para a transmissão de novos saberes. Por outro lado, Hawkins, (1995, p. 61) enfatiza que os professores tenham a consciência de que a “[...] tecnologia é capaz de ajudar o professor, mas não o substitui. Pode ajudar o professor a ensinar melhor e com qualidade. Mas não reduzirá o esforço necessário na sala de aula”.

O trabalho proposto em questão tem pretensões de responder os seguintes questionamentos sobre a problemática orientada:

- Os professores de matemática em formação continuada do curso semipresencial fazem uma reflexão sobre o ensino de geometria utilizando métodos no velho papel e caneta

⁴ Os professores participantes da pesquisa serão chamados de estudantes no corpo deste trabalho.

ou em ambientes de geometria dinâmica?

- De que maneira os professores conseguem efetivar o ensino de geometria, dando importância em suas aplicações e conexões com outros conteúdos estruturantes?
- Qual a visão do professor de matemática quanto da aplicação metodológica do software de geometria dinâmica na resolução de problemas propostos como ferramenta didática?

As hipóteses desta pesquisa estão centralizadas nas aplicações de atividades de geometria plana sobre o teorema do ângulo externo desenvolvidas no GeoGebra para direcionar melhor desempenho o processo de ensino de geometria plana .

1.3. Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Conceber e estruturar situações didáticas relacionadas ao teorema do ângulo externo e suas consequências no ensino à distância com o uso do GeoGebra.

1.3.2 Objetivos Específicos

Diante das discussões suscitadas para a elaboração desse projeto trazendo um embasamento teórico dos professores de matemática no ensino de geometria plana, este trabalho pretende desenvolver atividades que obtenha o êxito necessário ao objetivo principal. Destacamos a seguir os objetivos específicos propostos nesta pesquisa:

- ◆ Aplicar uma metodologia para a estruturação de situações didáticas para o AVA (Ambiente Virtual de Aprendizagem);
- ◆ Desenvolver material didático de apoio a EAD (Educação a Distância) com o objeto matemático (Teorema do ângulo externo e suas consequências);
- ◆ Descrever o design de produção de um blog com guia de aulas no ensino de geometria para o objeto matemático (Teorema do ângulo externo e suas consequências).

No próximo capítulo apresentaremos uma revisão bibliográfica e um embasamento teórico que possa servir de sustentáculo para a pesquisa e consiga fundamentar

o trabalho dando veracidade à proposta que objetivamos implantar. Tentaremos construir reflexões que torne rico e de fácil entendimento o plano de trabalho apresentado na realização da pesquisa.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E FUNDAMENTAÇÃO TEORICA

Neste capítulo construiremos reflexões sobre o uso do computador no ensino de matemática (VALENTE, 2003), a Engenharia didática (MICHELE ARTIGUE, 1995) e situações didáticas (LUIZ CARLOS PAIS, 2002) e a Educação Matemática (FIORENTINI E LORENZATO, 2006).

2.1 O uso do Computador no Ensino

Em se tratando da construção do saber no mundo globalizado em que vivemos, devemos fazer uma reflexão a respeito da utilização do computador na educação de maneira inteligente. Provavelmente agir de forma diferente ao modelo tradicional que vivenciamos onde o professor repassa a informação, administra e avalia as atividades propostas. Desta forma, pensamos em possibilitar mudanças no modelo de ensino que consiga potencializar o estudante na construção do próprio conhecimento com condições de criar, pensar, manipular e aprimorar a informação.

Esta análise nos permite entender que o uso do computador no processo do ensino é uma ferramenta essencial para dar esse suporte às ações pedagógicas do professor. De acordo com Valente (2003), uma máquina de ensinar e administrar esse ensino facilita muito à atividade do professor. Neste contexto, percebemos a necessidade de se trabalhar nas atividades pedagógicas de sala de aula, ferramentas dessa natureza que proporcionam um melhor desempenho nas tarefas e contribuem de forma significativa para uma abordagem educacional através de sistemas computacionais bem desenvolvidos.

No contexto educacional que se apresenta atualmente, o estudante precisa estar preparado e seguro para entrar no mercado de trabalho globalizado e competir de forma a entender o contexto do momento. Sem o conhecimento informatizado exigido para esse contexto, tudo se torna mais difícil e complexo, pois ocorrem mudanças constantes neste processo e exigem-se várias adaptações. Provavelmente, alguns professores não utilizem esta ferramenta por se sentirem inseguros do uso de Tecnologias de Informação (TIC) inseridas no processo de ensino e que estas venham mudar suas formas tradicionais de transmitir o conteúdo ou mudar sua prática pedagógica em sala de aula.

Quando se fala numa postura diferenciada do professor em suas ações pedagógicas, pretende-se estimulá-lo ao uso do laboratório de informática da escola com seus

alunos, oportunizar os estudantes a descobrirem diferentes estratégias pedagógicas de aprendizagem através da informatização do conhecimento adquirido no decorrer da ação de ensinar e proporcionar aos educandos uma maior interação para que possam partilhar experiências exitosas de aprendizagem de forma colaborativa e produtiva com desempenho satisfatório (RIBEIRO, 2008). Toda essa prática precisa ser entendida e discutida entre professores e alunos para que os novos conhecimentos possam ser adquiridos e ancorados aos que já foram consolidados (AUSEBEL, RIBEIRO et al, 2008, PONTES 2010).

Na informática educativa busca-se utilizar elementos ou recursos da informática geral quando se apropria das concepções didático-pedagógicas que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem e mostra tais concepções através da ferramenta computacional. Em geral, percebe-se através de experiências exitosas que essa forma de transmissão das informações pelo uso da máquina tem proporcionado aprendizagens satisfatórias nas salas de aulas e na busca do conhecimento pelos estudantes. Todo esse trabalho produz resultados eficazes quando a escola e a comunidade oferecem oportunidades aos estudantes para executá-los.

Almeida, (2000) descreve a Informática na Educação:

Informática na Educação é um novo domínio da ciência que em seu próprio conceito traz embutida a ideia de pluralidade, de inter-relação e de intercâmbio crítico entre saberes e ideias desenvolvidas por diferentes pensadores. Por ser uma concepção que ainda está em fase de desenvolver seus argumentos, quanto mais nos valermos de teorias fundamentadas em visões de homem e de mundo coerentes, melhor será para observarmos e analisarmos diferentes fatos, eventos e fenômenos, com o objetivo de estabelecer relações entre eles. (ALMEIDA, 2000, p.19)

Nesse trabalho, defendemos a ideia proposta por Valente (2003) que enumera o uso inteligente do computador na educação como aquele que tenta provocar mudanças na abordagem pedagógica vigente ao invés de colaborar com o professor para tornar mais eficiente o processo de transmissão de conhecimento (VALENTE, 2003, p.2).

2.2 A Engenharia Didática como Metodologia do Contrato Didático

A noção de contrato didático está associada ao conceito de *contrato social*, proposto por Jean-Jacques Rousseau (1712-1778) e também ao conceito de *contrato pedagógico* analisado por Filloux (1974).

Para Rousseau (1762), o contrato didático pode ser considerado como uma forma de compreender as regras de funcionamento da sociedade e suas implicações na educação,

admitindo que o estado natural do ser humano pudesse levá-lo ao reino da felicidade terrestre, uma vez que ele estivesse livre das várias distorções impostas pelas regras sociais.

Na concepção de Filloux (1974) é um *contrato pedagógico*, pois descreve a inconveniência de predominar indevidamente, no sistema didático, uma certa superioridade do professor em relação à posição do aluno. Essa concepção leva a uma imposição de poder considerado superior, a uma posição de inferioridade, reproduzindo o jogo social das relações de poder no ambiente escolar.

A ideia da *Engenharia Didática* desenvolvida na França, por Michèle Artigue, com o objetivo de trabalhar uma metodologia educacional através de sessões didáticas de curta, média e longa duração, viabilizadas por sequências didáticas que possibilitassem sua aplicação durante o processo formativo. Para Artigue:

A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, se caracteriza, em primeiro lugar, por ser um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino (ARTIGUE, 1995, p. 36).

De acordo com Santana (2010, p. 34), esta metodologia viabiliza tanto ações docentes convencionais, como ações de pesquisa e, num último caso, ações relativas à produção de materiais didáticos.

Gravina (2001, p. 99–100) assegura que esta metodologia adota princípios gerais da teoria piagetiana ao privilegiar os funcionamentos cognitivos que concorrem para o aprendizado, sendo ponto fundamental para o aluno como parte desse processo. Santana (2010, p.35) acrescenta que a engenharia didática faz uso das concepções da teoria das *situações didáticas* de Guy Brousseau que visa compreender as relações estabelecidas em momentos de formação.

Brousseau apud Machado (1999, p. 67) define **situações didáticas** como:

[...] um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição[...] o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes.

Percebe-se que este conjunto de relações estabelecidas pelos sujeitos envolvidos

(professor, aluno e um saber) constitui os elementos principais uma situação didática. Para Santana (2010), a essa tríade que estrutura a situação didática, faz-se necessário acrescentar os recursos tecnológicos de ensino.

Santana (2010, p.27) complementa:

Ao pensar os fenômenos epistemológicos na perspectiva das relações de ensino-aprendizagem nas áreas que envolvem ciências sociais e humanas, torna-se necessário o entendimento sobre uso de tecnologias de informação e comunicação e sua relação com a produção de saberes.

Pais (2001, p. 68-69) define as *situações a-didáticas* como “aspectos dos fenômenos de aprendizagem, em que não ocorre uma intencionalidade pedagógica direta ou o controle didático por parte do professor”. Em contrapartida, Pais (2011) afirma que a expressão “situações a-didáticas”, em relação a sua definição, parece ser algo contraditório, pois num certo sentido, esse tipo de situação, ao afetar as relações didáticas, acabam por interferir no andamento das situações didáticas em si.

Segundo Santana, outro aspecto relacionado ao contrato didático é o conjunto de expectativas e comportamentos que os alunos têm sobre o professor e vice-versa.

De acordo com Santana (2010, p.36).

[...] o contrato didático pode ser estabelecido implícita e explicitamente entre o professor e o aluno. Além disto, o contrato didático revela aspectos da gestão docente em aula, bem como, segundo Pais (2001,p.78), as concepções sobre contrato didático em Brosseau foram fundamentadas nas ideias sobre contrato social de Rosseau, bem como na concepção sobre contrato pedagógico em Filloux.

Pais (2001, p.17) compreende a *transposição didática* como um caso específico de transposição dos saberes. Neste sentido, antes de indagar o que vem a ser transposição didática, faz-se necessário conhecer o significado de transposição de saberes. Khun apud Pais (2001, p. 17-18) considerar o saber como um conjunto de paradigmas (entendidos como princípios e regras) que os membros de uma comunidade científica compartilham entre si. O autor afirma que para uma produção intelectual ser considerada científica essa deve respeitar as normas e os princípios aceitos pela comunidade científica.

Khun complementa ainda que na perspectiva da transposição didática, um dos objetivos dos sistemas escolares e do professor consiste em propor aos alunos o ensino do

saber científico como um saber a ensinar. Neste sentido, Chevallard apud Pais (p.19) apresenta a noção de transposição didática da seguinte forma:

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.

Diante das concepções didáticas apresentadas acima pelas escolas francesas nos reportamos à metodologia da engenharia didática com suas fases de construção, e que de para Santana (2010) ocorrem da seguinte maneira:

- a) Análise preliminar: processo que corresponde a análise geral dos aspectos envolvidos no ensino do conteúdo que se pretende ensinar;
- b) Análise a priori: consiste na elaboração das sequências didáticas, considerando os dados coletados na análise preliminar e as hipóteses do pesquisador;
- c) Experimentação: aplicação das sequências didáticas em cursos de formação, momento da validação ou invalidação das hipóteses didáticas;
- d) Análise a posteriori: verificação das hipóteses definidas na análise a priori podendo comparar as sequências didáticas com os resultados de experimentação.

Podemos então concluir que o contrato didático está vinculado a uma concepção didática pedagógica pensada nos recursos materiais, nos processos e nas intervenções midiáticas para determinada área do saber. Neste aspecto, é comum a ocorrência dessas concepções em áreas da educação à distância, inclusão digital ou em desenvolvimento de software educativo. Nesta perspectiva, as tecnologias educacionais exigem abordagens metodológicas que tornem válido o desenvolvimento de produtos educacionais, mecanismo de ações que favoreçam a interação, a motivação e o interesse dos estudantes.

2.3 O percurso da Educação Matemática

Apresentamos o caminho percorrido pela Educação Matemática desde que Matemática e Educação se contextualizam e ao mesmo tempo são independentes. Nesta etapa procuramos fundamentar nosso trabalho reportando aos grandes autores que desenvolveram

trabalhos neste contexto tais como: D'Ambrosio (2008), Miorim (1998), Borba (1999) e Fiorentini e Lorenzato (2007).

Para D'Ambrosio (2008), Matemática e Educação são estratégias contextualizadas e interdependentes. Para ele, a Matemática é uma estratégia desenvolvida pelos humanos e Educação é “[...] estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo [...]” (D'AMBROSIO, 2008, p.8) construída pelas diferentes sociedades.

Para formar a expressão literal, *Educação Matemática*, pretende-se promover uma educação específica com ênfase na Matemática como ferramenta. No entanto, para Borba e Santos (2005, p.294), “A Educação Matemática é uma região de inquérito que mantém interseções em Educação e Matemática, na busca de sua própria identidade; por isso, não se justifica seu distanciamento nem da Educação nem da Matemática”.

Analisando as colocações de Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 12) a Educação Matemática não se resume no simples ato de ensinar:

A preferência pelo uso do termo ‘educação matemática’ é atribuída ao fato de que este tem uma conotação mais abrangente, podendo significar tanto um fenômeno ou uma atividade educacional – que visa à formação integral do cidadão – quanto a uma área multidisciplinar do conhecimento – em que a matemática é uma disciplina entre outras, tais como a psicologia, a filosofia, a história [...].

Nesse contexto, em se pronunciar o termo “Educação Matemática”, identifica-se diferentes significados ligados a ele.

Enquanto campo profissional e área do conhecimento, Fiorentini e Lorenzato (2007) destacam que a Educação Matemática (EM) é mais abrangente que a própria Matemática. Para eles, indivíduos em faixas etárias e níveis de escolaridades diferentes e que gostam ou não de matemática fazem parte deste estudo.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2007, p.6), “Tomando por base o estudo de Kilpatrick (1992), poderíamos destacar pelo menos três fatos determinantes para o surgimento da EM como campo profissional e científico”. O primeiro foi a modernização do currículo escolar para o ensino de matemática. O segundo e terceiro elencados por Fiorentini e Lorenzato (2007, p.6) foram respectivamente:

[...] a iniciativa das universidades europeias, no final do século XIX, em promover institucionalmente a formação de professores secundários. Isso contribui para o surgimento de especialistas universitários em ensino de matemática;

[...] estudos experimentais realizados por psicólogos americanos e europeus, desde o início do século XX, sobre o modo como as crianças aprendiam matemática.

Miorim (1998) destaca que os movimentos internacionais para a modernização do ensino da matemática (século XX) foram fatos importantes na EM. Nestes movimentos surgiram a ‘moderna matemática’ “[...] uma ferramenta importante para a explicação dos fenômenos da natureza, ou seja, um elemento fundamental para a formação, comprovação e generalização de resultados observados na experiência”. (MIORIM, 1998, p.105).

No entanto, Fiorentini e Lorenzato (2007), afirmam que foi exatamente no final da década de 1970 e durante os anos de 1980 que a EM teve avanços como campo profissional surgindo neste contexto a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e os primeiros programas de pós-graduação em EM. Porém, a partir da década de 1990 a EM veio se consolidar no Brasil com a conclusão de doutorados de muitos educadores matemáticos (FIORENTINI; LORENZATO, 2007).

Desta forma, partindo da iniciativa de ensinar matemática a outros, das inquietações de pesquisadores e professores sobre o currículo, das inovações de metodologias de ensino e de aprendizagem e da divulgação do conhecimento é que a EM se desenvolve como campo profissional e área do conhecimento.

Na presente pesquisa pudemos contar com uma metodologia que tivesse o computador como ferramenta para potencializar as sessões didáticas que preparamos junto aos sujeitos participantes, caracterizando desta forma o contrato didático firmado no grupo.

Em relação à Educação Matemática pudemos focar a participação dos sujeitos da pesquisa por serem professores de matemática nas escolas públicas da região em que se desenvolveu a pesquisa e pela iniciativa do grupo em ensinar matemática a outros em virtude das suas pesquisas, inquietações, inovações metodológicas de ensino e divulgação do conhecimento. Neste ponto reconhecemos a EM como campo profissional e área do conhecimento.

No capítulo seguinte tentaremos mostrar o que nos motivou utilizar os ambientes de aprendizagens associados ao objeto matemático Teorema do Ângulo Externo para que pudessem ser desenvolvidos na pesquisa e pudessem mostrar uma prática pedagógica diferente para o ensino de Geometria.

3. DESENVOLVIMENTO

3.1 Educação a Distância: Entraves e Avanços

Ao enfatizar neste processo a EAD precisa-se de uma compreensão mais abrangente do assunto, de modo a entendê-lo a partir de sua evolução, características e conceituação. De acordo com autores importantes a respeito da questão, Ricardo Teixeira Veiga, Alexandre Inácio de Moura, Carlos Alberto Gonçalves e Francisco Vidal Barbosa, o ensino a distância (EAD) não é novidade. No Brasil, tem funcionado há décadas através de cursos por correspondência, como os do Instituto Universal Brasileiro, e pela televisão, como o Telecurso 2º Grau, criado pela Rede Globo. A maior novidade dos últimos anos é a possibilidade de uso de tecnologias interativas, que permitem a comunicação em tempo real entre instrutores e alunos, tais como as teleconferências e a internet, a qual tem-se desenvolvido em termos de capilaridade, velocidade e incorporação de recursos multimídia.

Pela análise dos fatos históricos, pode-se prever que, em decorrência da globalização a educação teve que se adequar às necessidades do mercado, criando assim uma nova postura diante das transformações no Brasil e no mundo, marcadas pelo surgimento de novas tecnologias. Segundo FERRARI (2007, p.24) “No Brasil, as experiências em ensino a distância ainda são escassas e localizadas em algumas universidades ou em escolas particulares”. Pode-se aqui, elencar a conceituação de educação à distância inferida por educadores, filósofos e cientistas do assunto:

- a) Moran (1994, p.1): Educação a distância é o processo de ensino-aprendizagem, mediado por tecnologias, onde professores e alunos estão separados espacial e/ou temporalmente;
- b) Holberg (apud VEIGA, 2007, p.3) o termo “educação à distância” refere-se a várias formas de estudo, de vários níveis, que não estão sob a contínua e imediata supervisão de tutores presentes com seus alunos nas salas de leitura ou no mesmo local. A educação a distância se beneficia do planejamento, direção e instrução da organização do ensino;
- c) Moore (apud VEIGA, 2007, p.3): EAD pode ser definida como a família de métodos instrucionais onde as ações dos professores são executadas à parte das ações dos alunos, incluindo situações continuadas que podem ser feitas na

presença de estudantes. A comunicação professor-aluno deve ser facilitada por meios impressos, eletrônicos, mecânicos ou outros.

Diante das reflexões feitas acima acerca da educação à distância (EAD), pode-se concluir que as atividades pedagógicas discutidas se concretizam na prática. De acordo com KEEGAN (1991, p.38) os elementos fundamentais sobre EAD estão enumerados da seguinte forma:

- a) Separação física entre professor e aluno, que distingue o EAD do ensino presencial;
- b) Influência da organização educacional (planejamento, sistematização, plano, projeto e organização rígida), que a diferencia da organização do ensino;
- c) Uso de meios técnicos de comunicação, usualmente impressos, para unir professor ao aluno e transmitir conteúdos educativos;
- d) Comunicação de mão-dupla, onde o estudante pode beneficiar-se da iniciativa no diálogo;
- e) Possibilidade de encontros ocasionais com propósitos didáticos e de socialização;
- f) Participação de uma forma industrializada de educação, potencialmente revolucionária.

Tornar a modalidade EAD operacionalizada requer alguns requisitos indispensáveis. A saber:

- a) Interoperabilidade visando: suportar vasta pesquisa acadêmica, comunicação entre diversos sistemas de aprendizado, compartilhamento de recursos;
- b) Colaboração visando: Comunicação entre aprendizes, aprendizes e professores, instituições e autoridades;
- c) Sistemas de avaliação que primem pela: auto avaliação, avaliação e aprendizado;
- d) Reutilização de módulos visando: a melhoria da qualidade de conteúdo disponibilizado e das formas de ensino, presença de conteúdo pedagógico incorporado constantemente renovado;
- e) Expansibilidade: facilitando a evolução gradativa dos sistemas.

Ao que se observa em exposição neste processo da EAD, percebe-se que esta apresenta características particulares aplicáveis à formação inicial e/ou continuada do

indivíduo que se encontra isolado geograficamente, sem acesso aos cursos regulares, além de possibilitar a percepção do homem como ser planetário, ao arriscar o convívio com a diversidade cultural, através dos conteúdos instrucionais, do material didático e dos métodos para operacionalização da pesquisa, dentre outros.

No que diz respeito à preparação do conteúdo instrucional, em EAD isto constitui um desafio, pois cada conteúdo deve ser criado em formato específico, compatível com o suporte tecnológico, e armazenado como arquivo, para ser acessado através da aula. É necessário trabalhar artisticamente o material didático, desenvolvido através de HTML, JAVA, PowerPoint, Autoware, etc., para torná-lo mais atraente, comunicativo e eficaz. Por isso, grandes organizações têm criado equipes de especialistas para cuidar do material instrucional. (VEIGA, 2008, p. 5). A Educação a Distância por sua natureza globalizante e integradora possui dois pilares de sustentação de grande relevância: a flexibilidade e a interatividade que, por sua vez, asseguram outro aspecto imprescindível, que é a autonomia.

A partir das definições do MEC (NEVES, 2000) existem 10 pontos a serem observados, são eles:

- a) Compromisso dos gestores;
- b) Desenho do projeto;
- c) Equipe profissional multidisciplinar (conteúdistas, técnicos, suporte pedagógico e estrutural);
- d) Valorização do trabalho tutorial e seu comprometimento com os objetivos do projeto didático-pedagógico;
- e) Alto grau de comunicação e interação entre os agentes;
- f) Recursos educacionais;
- g) Infraestrutura adequada de apoio e transparência nas informações;
- h) Sustentabilidade financeira – planejamento adequado dos investimentos;
- i) Convênios e parcerias. Dado que a implementação destes cursos revelou-se uma atividade bastante onerosa;
- j) Avaliação contínua e abrangente para atingir melhorias significativas e resolução de problemas.

Nesse contexto, percebe-se a necessidade de qualificação do indivíduo em um país com dimensões continentais como o Brasil tornar-se-ia prejudicada caso não houvesse o desenvolvimento da modalidade de Ensino à Distância que possui a capacidade de transpassar

as barreiras geográficas e levar o conhecimento a um número incalculável de pessoas, seja em nível acadêmico ou de pós-graduação.

Com o Ensino à Distância há possibilidades de que tanto o acadêmico quanto os profissionais das diversas áreas do conhecimento possam alcançar o saber desenvolvido nos mais diversos lugares sejam nacionais ou internacionais, assim como disseminar o que eles mesmos estão a produzir, sendo uma via de mão dupla onde a troca de conhecimentos possibilitam o engrandecimento e o aprimoramento na prestação de serviços.

3.2 O Ensino da Geometria no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA)

A dispersão dos softwares baseados em ambientes de geometria dinâmica ocorreu no final dos anos 80, e com o passar dos anos processos de aperfeiçoamentos continuam acontecendo. De acordo com Zulatto (2002 p. 19), o termo geometria dinâmica foi originalmente usado por Nick Jackiw e Steve Rasmussen, de forma genérica, a princípio com objetivo de diferenciar os softwares de geometria dinâmica destacando-os de outros softwares de geometria e, principalmente, como oposição à geometria tradicional de régua e compasso, que é considerada “estática”, pois se após o aluno realizar uma construção ele desejar analisá-la sob outros ângulos, isto é, considerando os objetos em outra disposição, terá que construir um novo desenho. De acordo com Goldenberg e Cuoco (1998 apud Zulatto, 2002 p. 19) os softwares de geometria dinâmica possuem um recurso, que possibilita a transformação contínua em tempo real, ocasionada pelo “arrastar”, sendo esta sua principal característica.

Ao analisar o recurso *arrastar*, percebe-se que o mesmo possibilita abertura de uma nova quantidade de aplicações e investigações educacionais, o que implica a descoberta e redescoberta de conceitos e propriedades relativos à Geometria (Henriques, 1998, p.13; Barbosa; Lourenço, 1998 apud Zulatto, 2002, p. 22). Cowper (1994, apud Zulatto 2002) afirma que o *arrastar* abre novas possibilidades para o ensino e aprendizagem de Geometria, baseado na exploração, permitindo que seus conceitos sejam mais atrativos e acessíveis, uma vez que ao arrastar um objeto na tela podem-se observar os casos da figura possíveis para um mesmo conjunto de figuras com a mesma propriedade, favorecendo o levantamento de conjecturas e hipóteses.

[...] o modo arrastar em um software Geometria Dinâmica possui três modalidades diferentes para o desenvolvimento de atividades: Arrastar sem um objetivo específico, lugar geométrico pelo arrastar e arrastar para testar hipóteses. O primeiro se refere ao tipo aleatório de arrastar no qual o estudante busca por regularidades ou

por comportamentos interessantes e ocorre em um momento de exploração da situação. O segundo tipo se refere ao arrastar de forma a preservar certa propriedade e visualizar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. O terceiro tipo pressupõe que o estudante já conheça a propriedade do objeto, arrastando-o sistematicamente apenas para testá-la. (Hollbrands, Laborde e Sträber 2008, apud Silva, 2010, p. 32.).

Percebe-se então, que atividades empreendidas com esses softwares diferem na possibilidade da movimentação e/ou alteração das características dos objetos, permitindo a simulação de diferentes casos com a mesma figura, possibilitando o aluno a formular suas próprias conjecturas e tentar verificá-las. Deste modo o aluno investiga o que acontece em sua construção, levantando hipóteses: a construção permanece com as mesmas características? O fato de movimentá-la influencia em sua característica original?

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) têm assumido um papel importante e de caráter indispensável nas investigações em Educação Matemática (EM) através da utilização do computador e com maior ênfase nos softwares de geometria dinâmica.

Para Lorenzato e Fiorentini (2007, p.45):

As TICs resultaram de fusão das tecnologias de informação, antes referenciadas como informática, e as tecnologias de comunicação, denominadas anteriormente como telecomunicações e mídia eletrônica. Elas envolvem a aquisição, o armazenamento, o processamento e a distribuição da informação por meios eletrônicos e digitais, como rádio, televisão, telefone e computadores.

Nesse contexto, sistemas de educação à distância (EAD) ganham destaque com o uso das ferramentas disponibilizadas pelas novas tecnologias para mediatizar o processo de ensino e aprendizagem com a utilização de ambientes virtuais de aprendizagem (AVA).

Com o grande avanço da *internet* e a popularização do uso do computador, surgiram diversas ferramentas para auxiliar a criação e a oferta de cursos mediados por essas tecnologias. De acordo com Santos (2003), apesar da expressão *ambientes virtuais de aprendizagem* ser, atualmente, muito utilizada, seu conceito não é tão claro e merece atenção.

De modo geral, um AVA refere-se ao uso de recursos digitais de comunicação, principalmente, através de *softwares* educacionais via *web* que reúnem diversas ferramentas de interação (OLIVEIRA *et al.*, 2004; VALENTINI, SOARES, 2005).

De acordo com Oliveira *et al.* (2004), um ambiente de aprendizagem pode ser conceituado como os espaços das relações com o saber, o qual é o objeto maior do processo de aprendizagem. Tais espaços são compreendidos pelos autores como ambientes

favorecedores da construção do conhecimento que ocorre a partir das interações dos alunos com os conteúdos, com os outros alunos e com os professores (OLIVEIRA *et al.* 2004, p. 118).

Percebe-se ainda nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs), a importância de promover o contato dos alunos com as tecnologias:

É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, 1998, p. 46).

Do mesmo modo, isso pode ser confirmado por Borba e Penteadó (2005, p.17), onde diz que “O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual, inclua no mínimo uma alfabetização tecnológica”.

Diante da grande utilização do ambiente virtual de aprendizagem nos processos de ensino e aprendizagem, percebe-se a que o uso de vários softwares educacionais tem aumentado nesses ambientes, disponíveis gratuitamente em rede e com inúmeras opções de aplicativos que podem subsidiar o professor em sua prática pedagógica. Entretanto é fundamental que antes de levar qualquer programa à sala de aula, faça-se uma avaliação ordenada da qualidade e das implicações de tais programas na educação, uma vez que nem todos podem ser classificados como contribuintes à aprendizagem. Segundo Nascimento:

Ao avaliar um software educativo, sob uma ótica construtivista, é primordial a identificação da concepção teórica de aprendizagem que está subjacente a ele, a sua compreensão enquanto programa de cunho educativo e ainda, vislumbrar no usuário um aprendiz que, ao interagir com o programa, o transforme em um ambiente virtual de aprendizagem significativa, capaz de gerar um conhecimento novo, com potencial para promover mudanças no cotidiano escolar ou fora dele. (NASCIMENTO, 2007, p. 10).

Experiências relatadas em artigos acadêmicos mostram a importância do uso do software no processo do ensino. Um grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, URI - Santo Ângelo, RS, bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência (PIBID) em

2010 realizaram um trabalho de oficina pedagógica de geometria com o uso do GeoGebra numa turma de alunos no Ensino Fundamental.

Os bolsistas expressam a grande aceitação dos alunos, que se mostraram interessados em participar e relataram ter gostado da experiência de trabalhar com o software GeoGebra, uma vez que o aplicativo os possibilitou visualizar as figuras, fazer comparações, aprender com seus erros e assimilar de forma dinâmica os conceitos geométricos.

Segundo Brousseau (1996, apud CONTIERO e GRAVINA, 2011, p. 9):

O trabalho com o software produz uma situação em que os alunos se engajam nas atividades não mais para atender a exigência do professor, mas movidos por interesse próprio, chamando a si a responsabilidade dos procedimentos de investigação, e desta forma estão dadas as condições para o desenvolvimento de habilidades e atitudes que caracterizam o raciocínio matemático.

Quanto ao grupo de professores envolvidos, percebeu-se que o trabalho propiciou um espaço para reflexão da sua prática pedagógica e dar continuidade ao trabalho desenvolvido como formação continuada, para a realização de discussões sobre a inserção de novos recursos pedagógicos que possam ser agregados ao planejamento de suas aulas servindo de subsídio para o processo de ensino e aprendizagem. De acordo com Valente (1993, p.23) “a formação do professor deve prover condições para que ele construa conhecimento sobre as técnicas computacionais e entenda por que e como integrar o computador na sua prática pedagógica”.

3.3 Uso do Software Geogebra e sua Aplicação no Ensino de Geometria

A quantidade de softwares educacionais que se encontram disponíveis de forma gratuita em rede é bastante significativa, são várias as opções de aplicativos que podem auxiliar o professor em sua prática pedagógica, no entanto é essencial que antes de levar qualquer programa à sala de aula, seja feita uma avaliação sistemática da qualidade e das implicações de tais programas na educação, uma vez que nem todos podem ser classificados como colaboradores à aprendizagem.

Neste sentido, segundo Nascimento (2007), para que se obtenha sucesso na utilização de um software educacional, faz-se necessário identificar nele presença de alguns aspectos pedagógicos, dentre os quais podemos destacar:

- a) Capacidade de gerar concentração e motivação;
- b) Espaço para o desenvolvimento de competências e habilidades;
- c) Preservação do ritmo individual de aprendizagem;

- d) Geração de autonomia para que o usuário construa seu próprio conhecimento;
- e) Promoção de interatividade;
- f) Contextualização com a proposta curricular.

E além dos aspectos pedagógicos, o autor enfatiza ainda a necessidade considerarmos os aspectos técnicos, dentre os quais destacamos:

- a) Compatibilidade;
- b) Portabilidade;
- c) Exigências para instalação;
- d) Interface atrativa;
- e) Facilidade no manuseio;
- f) Ferramentas explicativas;
- g) Disponibilidade de tutorial e menu ajuda;
- h) Opção de registro e impressão;

Dessa forma, para a escolha do software utilizado nas atividades de validação desse trabalho, foram observados todos esses aspectos, o que permitiu a verificação das condições necessárias para o funcionamento adequado do aplicativo, e inclusive quais os recursos seriam oferecidos pelo próprio programa.

3.3.1 Análise do Software Geogebra

O GeoGebra é um software que vai além da Geometria Dinâmica, mas é classificado com um software de Matemática Dinâmica. Foi desenvolvido por Markus Horenwarter e Judith Preiner, com início do projeto em 2001 na University of Salzburg e tem continuado o desenvolvimento na Florida Atlantic University e originado para ser empregado principalmente no ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas básicas, podendo ser usado também a nível superior, neste trabalho faço uso de sua versão mais recente até então, que é a 4.2 criada em 12 de dezembro de 2012. Sendo aplicativo multiplataforma ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS disponível para download no link <http://www.geogebra.org/cms/>.

O GeoGebra reúne ferramentas tradicionais da geometria, como as mais avançadas da álgebra e do cálculo. Fornece principalmente duas vistas diferentes de um mesmo objeto matemático que podem ser visualizado na janela gráfica e na janela de álgebra. A janela de visualização é o local onde os objetos são construídos, podendo editar a cor, espessura das linhas, medir ângulos, distâncias, etc. Por outro lado, na janela de álgebra é

possível visualizar a representação algébrica de todo objeto construído na janela visualização, e essa representação é a mais notável característica do programa. Todas essas características indicam que o GeoGebra é mais do que um software de Geometria Dinâmica, e se destaca no campo de softwares educacionais aliando ainda a condição de software livre e multiplataforma. A versão 4.4 possui ainda a vista CAS, associado com o sistema de computação algébrica, que permite operar simbolicamente, incluindo literais, composta de linhas que permitem que uma célula ou área de entrada, na linha de topo, e o resultado mostrado na parte inferior, a sua funcionalidade é semelhante à barra de entrada. Existe ainda uma folha de cálculo, que permite inserir não apenas números, mas também todo tipo de objetos matemáticos, suportado pelo GeoGebra (coordenadas de pontos, funções e comandos) e sendo possível o GeoGebra, assim como acontece na janela de CAS, mostra imediatamente na janela de visualização inserido numa célula (Fig. 3). E por fim, o GeoGebra disponibiliza uma barra de entrada, que consiste em ser um ambiente reservado para escrever coordenadas, equações, comandos e funções que ao clicar *Enter* é possível ver sua representação geométrica na janela gráfica (Manual GeoGebra v. 3.2).

Contudo, é possível construir objetos como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que suas propriedades e relações sejam preservadas. Possibilita, ainda, introduzir equações de coordenadas, visualizar um lugar geométrico ao se traçar a trajetória de um ponto escolhido, facilitando a observação do comportamento das funções seno, cosseno e tangente ponto a ponto, habilitar coordenadas cartesianas e polares as que facilitam as construções, em suma oferece uma variedade de comandos, incluindo o cálculo de derivadas e integrais.

O GeoGebra é um programa intuitivo e autoexplicativo podendo ser usado por usuários com conhecimentos avançados em informática e por iniciantes, sendo que o conhecimento matemático é o ponto fundamental de sua utilização. Levando em consideração que atividades investigativas instigam o aluno a questionamentos do tipo “o que acontece se”, o GeoGebra possui características que propiciam a criação de cenários para esse tipo de atividade, possibilitando ao aluno verificar propriedades de uma figura em processo muito rápido, levando assim o aluno a um processo de criação e exploração (SKOVSMOSE, 2008, apud SILVA, 2010, p.43).

Em geral, o software Geogebra pode auxiliar no estudo de diversos conteúdos matemáticos, diante de sua potencialidade, destacamos abaixo alguns dos conteúdos e concei-

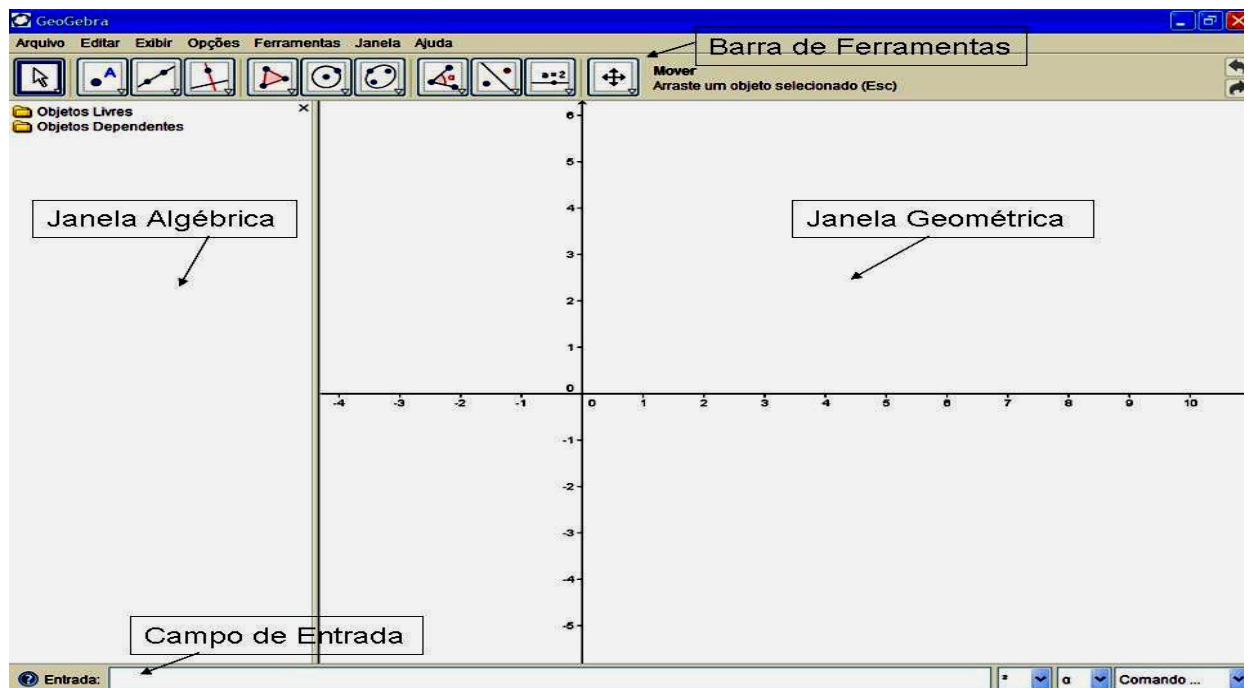
-tos que podem ser explorados por meio de seus recursos:

a) O estudo de figuras planas, podendo explorar conceitos como perímetros, áreas; os Teoremas de Tales e Pitágoras, semelhança de triângulo, bissetriz de um ângulo, mediatriz, mediana, Teorema do ângulo externo, trigonometria no triângulo retângulo, e muitos outros;

b) Plano cartesiano, funções polinomiais, funções trigonométricas, círculo trigonométrico, geometria analítica, probabilidade e estatística, seções cônicas, cônicas, integral e derivada, etc.

O software possui na parte superior uma barra contendo todas as ferramentas necessárias para a realização das atividades. Cada ícone tem ao lado a sua função específica facilitando a compreensão de quem está manuseando-o. Podemos observar a janela inicial do Geogebra na figura 1:

FIGURA 2: Registro da Interface da tela inicial do *Software GeoGebra* apresentando os ícones de trabalho a serem usados pelos estudantes para realizar as atividades da pesquisa.



Fonte: Próprio autor

3.4 O Ensino de Geometria Plana: Teorema do Ângulo Externo e suas Consequências

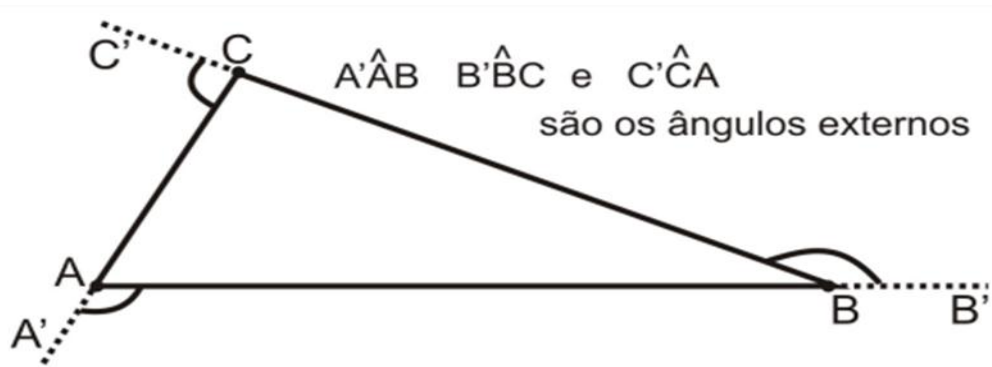
3.4.1 Situando a Temática

Nesta unidade, o teorema do ângulo externo não é apresentado como na grande

maioria dos textos do Ensino Básico; ao invés de uma igualdade, usaremos uma desigualdade Geométrica. Dentre as consequências aqui apresentadas, destacam-se a existência e unicidade da perpendicular a uma reta r , por um ponto P , fora dela, e a desigualdade triangular. Apresentaremos a seguir a *estrutura teórica*⁵ dos conceitos do teorema do ângulo externo e suas consequências para embasarmos nos pressupostos fundamentais da pesquisa.

Definição1: Dado um triângulo ABC , ao prolongarmos, a partir de cada vértice, as semirretas SAB , SBC e SCA , obtemos três ângulos, cada um dos quais é o suplemento de um dos ângulos internos. Cada um deles é dito “ângulo externo” do triângulo ABC conforme ilustrado na figura abaixo:

FIGURA 3: Triângulo ABC apresentando seus ângulos externos relativos aos seus vértices.



Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

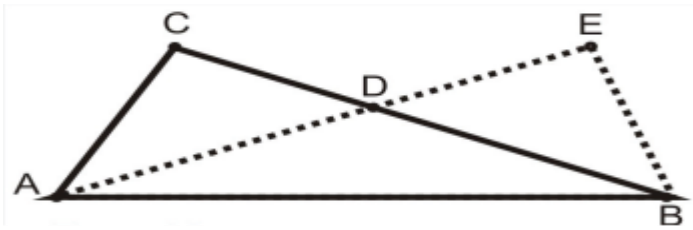
Teorema um: (Teorema do Ângulo Externo)

Qualquer ângulo externo de um triângulo é maior do que os dois ângulos internos que não lhe são adjacentes.

Demonstração: Sejam ABC um triângulo e $B'\hat{B}C$ um dos seus três ângulos externos, conforme ilustra a figura 3 abaixo.

⁵Texto Adaptado da Disciplina: Fundamentos de Geometria Euclidiana da UFPB-VIRTUAL (www.virtual.ufpb.br)

FIGURA 4: Triângulo ABC como base da demonstração do teorema do ângulo externo.



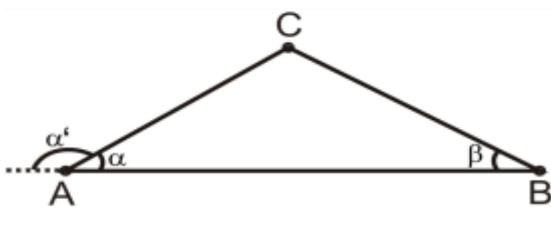
Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

Gostaríamos demonstrar que $\widehat{B'BC} > \widehat{C}$ e $\widehat{B'BC} > \widehat{A}$. Primeiramente vamos marcar um ponto D , em BC , de modo que $BD = DC$ (D é o ponto médio do segmento BC). Em seguida, prolonguemos a semi-reta SAD até um ponto E , de modo que D seja ponto médio de AE . Liguemos agora os pontos B e E e comparemos os triângulos ADC e EDB . Note que: $BD = DC$, pois D é ponto médio de BC , $\widehat{CDA} = \widehat{BDE}$, pois são ângulos opostos pelo vértice e $AD = DE$, por construção. Dai, segue-se que os triângulos ADC e EDB são congruentes e, portanto, em particular, obtemos que $\widehat{EBD} = \widehat{C}$. Como a semi-reta SBE divide o ângulo $\widehat{B'BC}$, decorre que $\widehat{B'BC} > \widehat{EBD} = \widehat{C}$. Usando uma construção análoga, mostra-se que $\widehat{B'BC} > \widehat{A}$. Isto conclui a demonstração.

Teorema 2: A soma das medidas de dois ângulos internos quaisquer de um triângulo, é menor do que 180° .

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Escolhamos, por exemplo, os ângulos internos \widehat{A} e \widehat{B} . Gostaríamos de mostrar que $\alpha + \beta < 180^\circ$, conforme figura 4 abaixo. Pelo Teorema do ângulo externo, obtemos que $\alpha' > \beta$, somando α a ambos os membros da desigualdade acima, segue-se que $\alpha' + \alpha > \alpha + \beta$, ou seja: $180^\circ > \alpha + \beta$, já que $\alpha' + \alpha = 180^\circ$. Portanto $\alpha + \beta < 180^\circ$. Isto conclui a demonstração.

FIGURA 5: Triângulo ABC como base da demonstração do Teorema 2.



Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

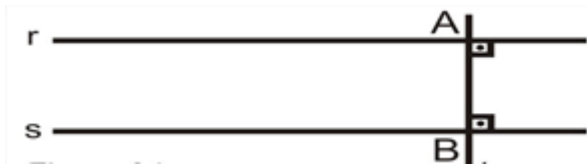
Corolário 1: Em qualquer triângulo, existem pelo menos dois ângulos internos agudos.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que em um triângulo ABC , quaisquer dois ângulos internos, por exemplo, \hat{A} e \hat{B} , não sejam agudos, isto é, cada um deles mede mais do que 90° , daí, a soma das medidas dos dois ângulos internos \hat{A} e \hat{B} é maior do que 180° . Isto é absurdo pois contradiz o teorema anterior. Portanto não podemos ter em um triângulo ABC , dois ângulos internos, cada um deles medindo mais do que 90° . Concluimos então que em qualquer triângulo ABC , existem pelo menos dois ângulos internos, cuja medida de cada um deles é menos de 90° . Isto conclui a demonstração.

Corolário 2: Se duas retas r e s são perpendiculares a uma terceira reta t , então r e s não tem ponto em comum.

Demonstração: Sejam dadas uma reta t e outras duas retas distintas r e s , perpendiculares a t , nos pontos A e B , respectivamente, conforme ilustra figura 5 ao lado.

FIGURA 6: Feixe de retas paralelas r e s .



Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

Gostaríamos de mostrar que r e s não têm ponto em comum, ou seja, r e s são paralelas. Para isso, suponha por absurdo, que r e s se interceptassem em um ponto P . Neste caso, teríamos um triângulo ABP com dois ângulos retos. Já sabemos, pelo corolário 1, que isso é impossível! Portanto o ponto P , como descrito acima, não existe. Concluimos então que as retas r e s são paralelas, o que equivale dizer que não têm ponto em comum. Isto conclui a demonstração.

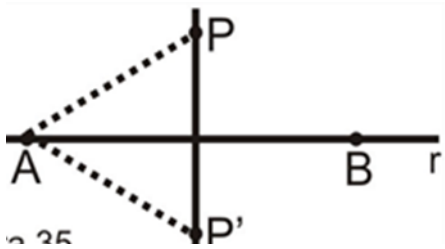
Teorema 3: Por um ponto P , fora de uma reta r , passa uma única reta s , perpendicular à reta r .

Demonstração: Primeiro mostraremos que existe a reta s , como descrita no teorema, em seguida mostraremos a unicidade.

Existência

Considere a reta r e o ponto P , fora dela, como ilustrado na figura 6 abaixo.

FIGURA 7: Reta r contendo os pontos A e B com os pontos P e P' não pertencentes a r .



Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

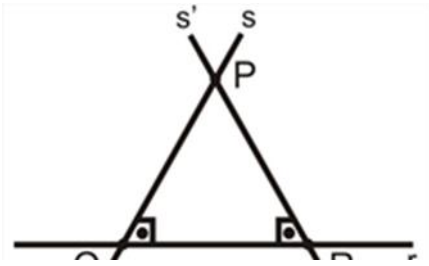
Em seguida, escolha dois pontos distintos A e B , em r . Trace agora o segmento PA , caso a reta que contém PA seja perpendicular a r , fica provada a existência. Caso isso não ocorra, considere, no semiplano que não contém P , uma semi-reta com origem A , formando com a semi-reta SAB , um ângulo congruente a \widehat{PAB} . Na semi-reta com origem A , escolha um ponto P' tal que $AP' = AP$ (ver figura).

Afirmção: O segmento PP' é perpendicular a r . De fato, pois o triângulo PAP' é isósceles, já que $AP' = AP$ (por construção). Como $\widehat{PAB} = \widehat{P'AB}$ também por construção, segue-se que a reta r contém a bissetriz do ângulo $\widehat{PAP'}$, no triângulo isósceles PAP' , cuja base é PP' . Como já provamos, no teorema 4 da unidade 3, que essa bissetriz é perpendicular à base, concluímos que a reta s , que passa por P e P' , é perpendicular a r . Isto conclui a demonstração da existência.

Unicidade

Suponha que existissem duas retas s e s' , ambas passando por P e perpendiculares a r , conforme ilustra figura 7 abaixo. Nesse caso, teríamos um triângulo PQR com dois ângulos retos. Mas já sabemos que isso é impossível. Concluímos então que, nas condições do teorema, s é unicamente determinada.

FIGURA8: Retas r cortada pelas retas s e s' concorrentes em P e perpendiculares a r em Q e R respectivamente.



Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

Dialogando e construindo o seu conhecimento



Note que a demonstração desse teorema nos dá um método para construção de retas perpendiculares. Além disso, se, ao invés de apenas o ponto P , fora de r , tivéssemos dois pontos distintos P e Q , ambos fora de r , obteríamos uma perpendicular s , que passa por P , e outra perpendicular t , que passa por Q . Em virtude do corolário 2 acima, as retas s e t são paralelas ou coincidentes. Portanto também temos um método para construção de retas

paralelas.

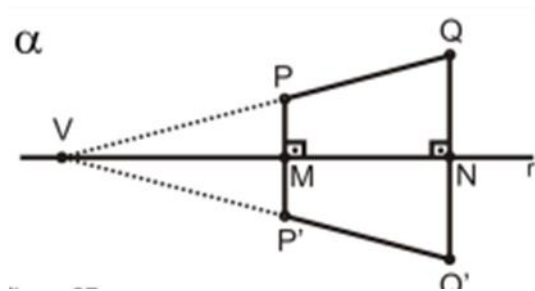
Observação: O ponto P' , como obtido na demonstração anterior é dito “reflexo” de P , relativamente à reta r . Portanto, a partir de um plano α e de uma reta r , nele contida, podemos definir a transformação do plano α , por $Fr(P) = P'$, Fr é a “transformação do plano α ” por uma reflexão, relativamente a uma reta r , de α . Essa transformação é simples de ser entendida geometricamente. Para isso, imaginemos um ponto P qualquer no plano α , o qual contém a reta r . o seu reflexo $P = Fr(P)$ pode ser obtido, traçando-se a reta s perpendicular a r , que passa em P , em seguida o ponto P' é escolhido, em s , de modo que $AP = AP'$, onde A é o ponto de interseção das retas r e s . Esse ponto A é o pé da perpendicular. Dentre propriedades da reflexão Fr , a preservação da distância é uma das mais importantes.

Teorema 4: A transformação do plano α , por uma reflexão relativamente a uma reta r , contida em α , denotada por Fr , preserva distâncias, isto é:

Dados quaisquer dois pontos P e Q , em α , os segmentos de reta PQ e $Fr(P)Fr(Q) = P'Q'$ têm a mesma medida.

Demonstração: Seja α um plano, r uma reta contida em α e Fr a transformação do plano α , relativamente a r . Dados agora quaisquer dois pontos P e Q , pertencentes a α , gostaríamos de mostrar que os segmentos PQ e $P'Q'$ são congruentes, quando $P' = Fr(P)$ e $Q' = Fr(Q)$, conforme ilustrado na figura 8 abaixo. O ponto V foi escolhido, de modo que esteja alinhado com P e Q . Pela própria construção dos pontos P' e Q' , decorre que V, P' e Q' também estão alinhados.

FIGURA 9: Reta r e a transformação por reflexão dos pontos P e Q .



Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

Vamos agora comparar os triângulos VQN e $VQ'N$. Temos que: $VN = VN$ (lado comum), $\widehat{VNQ} = \widehat{VNQ'}$ (são ângulos retos) e $QN = Q'N$ (pois Q' é o reflexo de Q). Dai, pelo caso *LAL*, de congruência de triângulos, $VQN = VQ'N$. Analogamente mostramos a congruência dos triângulos VPM e $VP'M$. Dessas congruências, obtemos que $VQ = VQ'$ e $VP = VP'$, como consequência disso os segmentos PQ e $P'Q'$ tem a mesma medida. Isto equivale dizer que $PQ = P'Q'$ e conclui a demonstração.

Observação: Essa demonstração não é válida quando PQ é paralelo à reta r . Como você o demonstraria nesse caso?

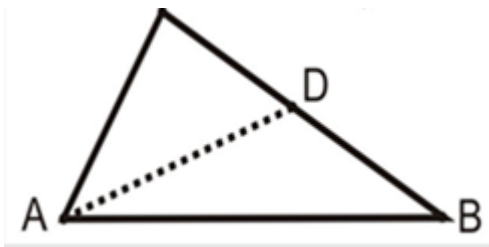
Teorema 5: *Em qualquer triângulo, a lados não congruentes opõem-se ângulos não congruentes. E o menor ângulo opõe-se ao menor lado.*

Demonstração: Como já mostramos, nos teoremas 2 e 3, da Unidade III, que “dois lados de um triângulo são congruentes, se e só se, os ângulos que se opõem a esses lados também são congruentes”. É claro que decorre daí que “lados não congruentes de um triângulo opõem-se a ângulos não congruentes”. Resta-nos agora mostrar que “o menor ângulo opõe-se ao menor lado”. Para isso, seja ABC , um triângulo qualquer, onde $AC < BC$, ou seja, a medida do

segmento AC é menor do que a medida do segmento BC . Gostaríamos de mostrar que $\widehat{AB}C < \widehat{CA}B$, ou seja, a medida do ângulo $\widehat{AB}C$ é menor do que a medida do ângulo $\widehat{CA}B$. Ver ilustração na figura 9 abaixo.

Como, por hipótese, $AC < BC$, podemos marcar um ponto D , entre B e C , de modo que $CD=AC$. Consequentemente a semi-reta SAD divide o ângulo $\widehat{CA}B$ (ver figura). Dai, decorre

FIGURA 10: Triângulo ABC com D ponto médio de BC.



Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

que $\widehat{CA}B > \widehat{CA}D = \widehat{CD}A$, esta igualdade em virtude do triângulo CAD ser isósceles de base AD . Agora, como $\widehat{CD}A$ é ângulo externo do triângulo ABD (ver figura), segue-se que $\widehat{CD}A > \widehat{AB}C$. Como já mostramos anteriormente que $\widehat{CA}B > \widehat{CD}A$, obtemos que $\widehat{CA}B > \widehat{CD}A > \widehat{AB}C$, donde finalmente concluímos que $\widehat{AB}C < \widehat{CA}B$. Isto conclui a demonstração.

Observação: Note que o teorema 5 pode ser reescrito na forma:

Teorema 6: *Em qualquer triângulo, a ângulos não congruentes, opõem-se lados não congruentes. E o menor lado opõe-se ao menor ângulo.*

Vamos agora apresentar alguns resultados, com o objetivo de resolvermos o seguinte problema sobre “construtibilidade de triângulos”.

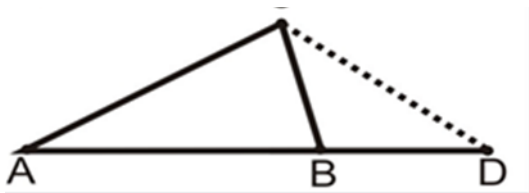
Problema: Dados três segmentos de reta AB , BC e CD , cujas medidas, em uma mesma unidade de comprimento, sejam representadas por $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Suponhamos que $c \leq b \leq a$. Mostre que só é possível construir um triângulo, tendo os segmentos AB , BC e CD como lados se e só se $a < b + c$.

A resolução desse problema vai nos mostrar que, uma vez construído um triângulo qualquer, a medida de cada lado é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados. Para isso vamos demonstrar os teoremas abaixo.

Teorema 7: *Em qualquer triângulo, a medida de qualquer lado sempre é menor do que a soma das medidas dos outros dois.*

Demonstração: Sejam ABC um triângulo qualquer e AC um de seus lados. Gostaríamos de mostrar que $AC < AB + BC$. Para isso, marque um ponto D na semi-reta SAB , tal que $AD = AB + BC$; consequentemente $BC = BD$. Portanto o triângulo CBD é isóscele de base CD , conforme ilustra figura 10 abaixo.

Figura 11: Triângulo ABC com prolongamento BD de AB sob condições convenientes.



Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

Dai, obtemos que $\widehat{CDB} = \widehat{BCD}$. E como B está entre A e D , segue-se que $\widehat{BCD} < \widehat{ACD}$, dai, $\widehat{CDB} < \widehat{ACD}$. Portanto, se olharmos para o triângulo ACD , o teorema 6 acima nos garante que a medida do lado que se opõe ao ângulo \widehat{CDB} é menor do que a medida do lado que se opõe ao ângulo \widehat{ACD} , ou seja: $AC < AD = AB + BC$ e assim $AC < AB + BC$. Isto conclui a demonstração.

Teorema 8 (Desigualdade Triangular): *Se A , B e C são três pontos distintos de um plano α , então $AC \leq AB + BC$. A igualdade ocorre se e somente se B é um ponto do segmento AC .*

Demonstração: Sejam A , B e C pontos distintos de um plano α . Caso eles não estejam alinhados (em uma mesma reta r), teremos um triângulo, cujos vértices são os pontos A , B e C . Nesse caso, o teorema 7 acima nos garante que $AC < AB + BC$ e evidentemente isto implica que $AC \leq AB + BC$, o que conclui a prova. Caso A , B e C esteja alinhado sobre uma reta r , a cada um deles corresponde um único número real (coordenada do ponto), digamos a , b , e c , respectivamente. Neste caso, vamos admitir o seguinte fato: Sejam A , B e C pontos distintos de uma mesma reta, cujas coordenadas são, respectivamente a , b e c . O ponto C está entre A e B se, e somente se, o número c está entre a e b . Este fato encontra-se demonstrado como o teorema 2.2 da referência bibliográfica [1]

A demonstração é, portanto concluída como consequência imediata do fato acima citado.

Teorema 9: Sejam a , b e c três números positivos. Se $|a - b| < c < a + b$, então é possível construir um triângulo, cujas medidas dos lados, em uma mesma unidade de comprimento, sejam a , b e c .

Demonstração: Suponha a , b e c em uma mesma unidade de comprimento. Trace agora uma reta r e marque sobre ela, dois pontos A e B , tais que $AB = c$. Use um compasso e descreva duas circunferências; uma de centro A com raio b e a outra de centro B com raio a , conforme ilustra a figura 11 abaixo.

FIGURA 12: Construção por régua e compasso das circunferências C e C' a partir da reta r .

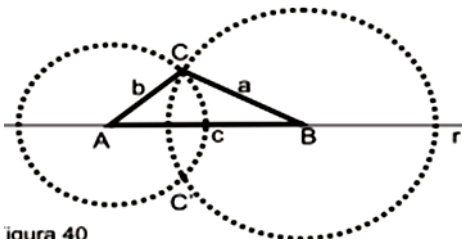


Figura 40

Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

As duas circunferências só se interceptam por causa da hipótese $|a - b| < c < a + b$. E um triângulo ABC pode ser construído, a partir da escolha de um dos dois pontos de interseção das duas circunferências; C ou C' (ver figura).

- Caso $c \geq a + b$, as duas circunferências só poderão ter, no máximo, um ponto em comum, no segmento AB . Portanto é impossível construir um triângulo, cujos lados medem a , b e c .
- Caso $c \leq |a - b|$, uma das circunferências fica no interior da outra e, no máximo, tem um ponto em comum, na reta r . Portanto, também é impossível construir um triângulo, cujos lados medem a , b e c .

Tente ilustrar geometricamente as duas situações de impossibilidade da construção do triângulo. Concluimos aqui a demonstração.

Exemplos Ilustrativos

(1) Sabendo-se que as medidas, em cm, dos lados de um triângulo ABC , são representadas por números naturais, e que $AB = AC = 3$.

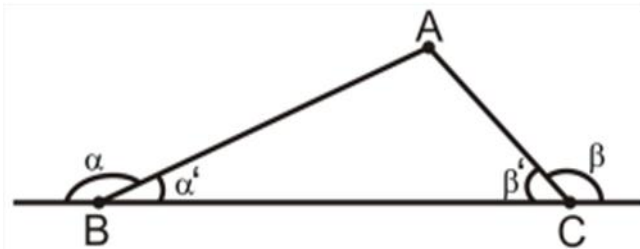
Quantas e quais são as possibilidades para o triângulo ABC ?

Resolução: Seja $BC = x > 0$. Como $AB = AC = 3$, a condição de construtibilidade de um triângulo ABC , pelo Teorema 9, é dada por $|3 - 3| < x < 3 + 3 \Leftrightarrow 0 < x < 6$.

Como $x \in \mathbb{N}$, as possibilidades para x , são 1, 2, 3, 4 ou 5. Portanto o total de triângulos possíveis é cinco sejam T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 esses triângulos. As medidas dos seus lados, em cm, podem ser representadas, respectivamente, pelos ternos de números reais: 3, 3 e 1; 3, 3 e 2; 3, 3 e 3; 3, 3 e 4; 3, 3 e 5.

(2) Na figura abaixo, sabe-se que $\alpha > \beta$.

FIGURA 13: Triângulo ABC com ângulos internos α' e β' e ângulos externos α e β .



Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

Nessas condições, $\alpha' < \beta'$. Como justificar ficar esse fato?

Resolução:

(I) O teorema do ângulo externo, aplicado no triângulo ABC , nos garante que $\alpha' < \beta$.

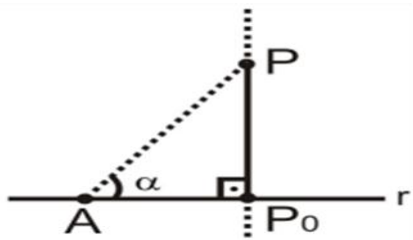
(II) É claro que $\beta < \beta + \beta'$, e como $\beta + \beta' < \beta'$, segue-se que $\beta < \beta'$.

De (I) e (II), decorre que $\alpha' < \beta < \beta'$. Daí, obtemos que $\alpha' < \beta'$. Isto completa a justificativa.

(3) Como determinar o menor caminho de um ponto P até uma reta r ? Ou como calcular a distância de P até r ?

Resolução: Dados um ponto P e uma reta r . Primeiramente, caso P esteja na reta r , essa distância é zero. A única outra possibilidade, ou seja, caso P não esteja sobre a reta r , o segmento PP_0 , onde P_0 é pé da perpendicular traçada de P_0 a r , conforme ilustra a figura 13 abaixo, nos dá esse “caminho mínimo”.

FIGURA 14: Reta r contendo os pontos P_0 e A , e P externo a r .



Fonte: Disciplina Fundamentos de Geometria Euclidiana UFPB - Virtual

Para justificar isso, basta considerar um ponto A , em r , diferente de P_0 . Em seguida considere o triângulo PAP_0 e note que $\alpha < 90^\circ$ implica que o segmento P_0P é menor do que PA , pois em qualquer triângulo, ao menor ângulo opõe-se o menor lado.

Na presente pesquisa pudemos contar com um público de estudantes participantes que estão fazendo parte de um Curso Semipresencial de Metodologia no Ensino da Matemática na modalidade à distância onde os mesmos se encontram a cada 15 (quinze) dias para as aulas presenciais. Desta forma justificamos o uso da EAD presente neste trabalho. Destacamos também o uso do AVA como ambiente de aprendizagem usando o computador como ferramenta de apoio pedagógico na pesquisa.

No capítulo que segue descrevemos o passo a passo da pesquisa desde os instrumentais utilizados, o contrato didático firmado, as etapas em que a pesquisa se desenvolveu, os procedimentos adotados e a metodologia utilizada para desenvolvê-la.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E INVESTIGATIVOS

4.1 Classificação da Pesquisa

O trabalho que aqui apresentamos define com clareza a forma como ocorreu o processo da pesquisa e quais os aspectos metodológicos que foram seguidos durante o processo para compreender quais escolhas fizemos nesta dissertação. Seguimos passos que evidenciaram a necessidade de coletar informações da pesquisa a respeito do conhecimento adquirido e acumulado sobre este. De acordo com Ludke e André apud Magalhães (2009) para haver pesquisa, é preciso o embate entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento acumulado sobre o mesmo. Segundo Almouloud (2008) o processo de pesquisa científica se caracteriza por:

Um conjunto de operações sucessivas e distintas, mas interdependentes, realizadas por um ou mais pesquisadores, a fim de coletar sistematicamente informações válidas sobre um fenômeno observável para explicá-lo ou compreendê-lo. Um trabalho complexo que reúne diferentes competências (escrever, sistematizar, analisar), organização pessoal e domínio de técnicas especializadas (documentação, instrumentos de pesquisas, etc). (ALMOULOU, 2008, p.63).

De acordo com as diversas formas de classificar as pesquisas científicas, elas não se apresentam de forma homogenia em relação aos conceitos de categorias que assumem e que isto pode dar margens de divergência entre pesquisadores no que diz respeito à classificação de seus trabalhos.

Neste contexto optamos em seguir uma classificação de pesquisa que possa atender aos anseios dos que buscam consultar obras que lhes favoreçam níveis detalhados e mostrem aspectos específicos para responder seus interesses pessoais no campo da investigação científica.

Prosseguiremos nosso trabalho enfatizando Gil e Carvalho (2006) que são pesquisadores consagrados no campo da educação científica e que defendem uma metodologia específica no campo das ciências.

Ao que foi abordado anteriormente, apresentaremos as formas clássicas de classificação da pesquisa de acordo com Gil (1991, 2007) e faremos uma classificação quanto à natureza abordada, quanto ao problema pesquisado, quanto aos objetivos e quanto aos procedimentos técnicos utilizados.

4.1.1 Quanto à Natureza Abordada

Nesta pesquisa abordaremos quanto à sua natureza como aplicada, pois buscaremos aliar objetivos que possam gerar novos conhecimentos aplicáveis à prática para solucionar problemas específicos para então gerar novos conhecimentos. Desta forma este trabalho se desenvolverá como pesquisa aplicada, pois estaremos interessados em implicações práticas dos novos conhecimentos adquiridos com a pesquisa.

4.1.2 Quanto ao problema pesquisado

De forma geral, as pesquisas seguem o método de pesquisa qualitativa, pois se preocupam com a metodologia de “como” e não se atentam com os aspectos quantitativos de “quanto”. Dessa maneira estaremos em concordância com Borba (2006) *apud* Magalhães (2009) que cita a pesquisa qualitativa como método que nos fornece mais informações descritivas que dão ênfase aos significados atribuídos as ações. Na pesquisa qualitativa, o pesquisador se mostra como o instrumento-chave e a fonte é a coleta direta dos dados (Gil, 1991, 2007). Faremos justiça em adotar a pesquisa qualitativa por se apresentar com as mesmas características que pretendemos desenvolver na abordagem do problema pesquisado.

4.1.3 Quanto aos objetivos

Quando observamos os objetivos em que sobre os quais desejamos alcançar nesta pesquisa, vimos à necessidade de classificá-la como pesquisa exploratória, que de acordo com Gil (1991, 2007) a pesquisa exploratória visa proporcionar maior familiaridade com o problema com objetivo de torná-lo explícito ou a construir hipóteses.

Na pesquisa exploratória, segundo Gil (1991, 2007), os métodos adotados assumem formas de estudo de caso e de pesquisa bibliográfica, e que, por conseguinte, consideramos o levantamento bibliográfico, as entrevistas, análises de exemplos que estimulam a compreensão. Desta forma, nossos objetivos nos impulsionam a definir a pesquisa como exploratória uma vez que procuramos desenvolver certa intimidade com o problema pesquisado.

4.1.4 Quanto aos procedimentos técnicos

Tomando por base os procedimentos técnicos adotados por Gil (2007) na coleta de dados, as pesquisas são classificadas em: Bibliográfica, Documental, Experimental, Levantamento, Estudo de caso, Expost-Facto, Pesquisa ação e participante.

- *Pesquisa Bibliográfica*: quando produzida com base em materiais já publicados anteriormente como livros, artigos de periódicos e atualmente com pesquisas na internet;
- *Pesquisa Documental*: quando é estruturada com base em materiais que não receberam um tratamento analítico e que podem ser reelaborado de acordo com os objetivos da pesquisa;
- *Pesquisa Experimental*: quando se determina um objeto de estudo, selecionam-se as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definem-se as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto;
- *Levantamento*: quando se deseja conhecer o comportamento das pessoas envolvidas na pesquisa interrogando-as diretamente;
- *Estudo de caso*: quando envolve um estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento;
- *Pesquisa Expost-Facto*: quando o processo de experimentação acontece depois dos fatos;
- *Pesquisa-Ação*: quando concebida e realizada com estreita associação com a uma ação ou resolução de um problema de interesse coletivo com a participação cooperativa dos pesquisadores e participantes;
- *Pesquisa Participante*: quando se desenvolve com a interação dos pesquisadores e dos membros das situações pesquisadas.

Neste contexto, adotamos as acepções propostas por Gil (2007) para classificar a pesquisa quanto aos procedimentos realizados na coleta de dados. Desta forma, os caminhos a serem percorridos pelo professor pesquisador durante a realização da pesquisa com o envolvimento participativo e cooperativo dos estudantes foram de grande importância, pois procuraram construir novos conhecimentos para solucionar um problema integrando o planejamento e ações para concretizar o trabalho. Assim, classificamos esta pesquisa como pesquisa ação.

Gil (2007) faz uma alusão à pesquisa ação quando afirma que esta se desenvolve através da participação ou do envolvimento cooperativo do pesquisador e dos participantes representativos da situação ou do problema.

A pesquisa ação é idealizada quando a pesquisa é realizada com boa associação com uma ação ou com o problema coletivo. Os pesquisadores e participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (GIL 1991, p. 47).

Para Pontes (2010) a pesquisa ação é uma forma de construir novos conhecimentos para solução prática de um problema na qual a relação entre teoria e prática é privilegiada durante toda a pesquisa.

Para a realização desta etapa da pesquisa, contamos com o envolvimento colaborativo e participativo dos participantes e pesquisador, reconstruindo e dando significado aos procedimentos adotados de forma adequada, e neste contexto consideramos que esta pesquisa assume características de pesquisa participante, pois, segundo Gil (2007), a pesquisa participante ocorre quando a mesma se desenvolve a partir da interação entre os pesquisadores e membros das situações investigadas.

Desta forma, os procedimentos técnicos adotados nesta pesquisa seguem a seguinte estrutura:

- a) Levantamento do grupo de sujeitos da pesquisa, seus comportamentos, suas informações a cerca do problema em estudo e familiaridade com o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra como ferramenta utilizada no ensino;
- b) Questionário semiestruturado contendo atividades propostas para o grupo a serem resolvidas tanto no ambiente papel e lápis como no formato eletrônico no ambiente computacional, onde serão feitas entrevistas ao final da aplicação das atividades, áudio-gravações dos diálogos e as observações do pesquisador em forma de diário de bordo;
- c) Auto avaliação analisando qualitativamente a eficiência do software na resolução de problemas envolvendo o teorema do ângulo externo para ser utilizado no ensino de matemática como ferramenta de apoio à docência.

4.2 Fases de Desenvolvimento da Pesquisa

Apresentamos nesta etapa da pesquisa, as fases que se desenvolveram os trabalhos da pesquisa tais como as investigações do tipo de problema geométrico para ser trabalhado no AVA adotado para consolidar o trabalho, a elaboração do contrato didático adotado pelos participantes, a construção do plano de pesquisa e das sessões didáticas; os procedimentos didáticos que se realizaram na sala de aula no Velho Papel e Caneta (VPC) e os procedimentos didáticos que se realizaram no laboratório de informática no ambiente virtual de aprendizagem (AVA). Nos primeiros encontros a proposta firmada entre os participantes e o professor-pesquisador foi trabalhar o questionário de problemas envolvendo o objeto matemático no VPC, em seguida, ou seja, nos demais encontros aplicar o mesmo questionário no AVA.

4.2.1 *Investigação na Tipologia dos Problemas Geométricos no AVA*

Do ponto de vista da análise de eficácia da solução de problemas de geometria no GeoGebra, inspirou-nos elaborar uma tipologia de problemas que fosse adequada para este ambiente de aprendizagem. A utilidade desta classificação é orientar os professores nas escolhas acertadas de problemas geométricos, levando em consideração os conceitos a serem construídos e a reflexão de atividades relacionadas ao teorema do ângulo externo.

A tipologia dos problemas ocorreu da seguinte forma:

- i) Problemas que solicitem a relação de posição ou de configuração;
- ii) Problemas que solicitem uma relação aritmética expressa por um valor fixo;
- iii) Problemas que solicitem uma relação aritmética expressa por uma expressão algébrica.

A investigação de problemas do tipo (i) e (ii) é adequada para o ambiente GeoGebra, uma vez que o software possui ferramentas adequadas que podem auxiliar o aluno na busca da solução correta para o problema. Por outro lado, a investigação de problemas do tipo (iii) no GeoGebra, pode conduzir o aluno a uma solução equivocada.

4.2.2 Elaboração do Contrato Didático Adotado para a Pesquisa

Dentro do levantamento que fizemos no grupo que se propôs participar da pesquisa, foram categorizadas algumas ações que deveríamos tomar para que pudéssemos obter respostas às hipóteses anteriormente levantadas a respeito do trabalho. Dentre o acordo a que ficou conhecido por “*contrato didático*” por Filloux (1974), destacamos a organização do grupo em duplas para a resolução das atividades, o número de encontros que deveríamos fazer para concluir a pesquisa e a análise prévia das atividades e ou problemas de geometria que contemplavam o teorema do ângulo externo e suas consequências.

No contrato firmado pelo grupo, ficou acertado que no momento em que ocorreria a análise didática prévia das questões, cada grupo iria se dedicar na busca de possíveis estratégias de resolução para a atividade pelos sujeitos da pesquisa e os registros das dificuldades que os mesmos encontrassem quando na tentativa da solução.

As questões foram resolvidas nos primeiros momentos dos 5(cinco) encontros no velho papel e caneta (utilização de esquadros, compasso e régua) pela familiaridade dos mesmos com os instrumentos clássicos do desenho geométrico. Na segunda etapa da pesquisa, as mesmas questões foram apresentadas no ambiente virtual de aprendizagem utilizando o software GeoGebra como ferramenta.

Durante a apresentação das questões apresentadas para as 6(seis) duplas na tentativa de encontrar a solução tanto no velho papel e caneta como no ambiente virtual, foram anotadas as sessões didáticas ocorridas em cada ambiente. Destacaremos a seguir, como ocorreu a coleta sistemática dos dados e as ações realizadas:

- a) Especificou-se o contrato didático de cada encontro: a tipologia das questões apresentadas, a ordem dos ambientes para busca da solução, os anseios do grupo, o que seria avaliado;
- b) Registrou-se como resultado do contrato didático o planejamento para cada sessão didática contemplada em cada encontro contendo:
 - Os objetivos para cada encontro;
 - As estratégias utilizadas para se alcançar os objetivos levando em consideração a heterogeneidade do grupo e suas deficiências cognitivas sobre o assunto;
 - Apresentação dos problemas para resolução;

- Estratégias para envolver as duplas na busca de solução para o problema apresentado;
 - Os recursos necessários para o encontro: ambientes de aprendizagem;
 - Possíveis questionamentos do grupo;
 - Possíveis respostas aos questionamentos;
 - Possíveis soluções apresentadas pelas duplas;
 - Utilização das possíveis soluções para a solução ideal dos problemas.
 - Apresentação da etapa que mostra a solução correta encontrada pelas duplas.
- c) Construiu-se um diário de bordo contendo o relato descritivo da realização de cada encontro, elencando os acontecimentos previstos e não previstos, as dificuldades encontradas e os aprimoramentos para os próximos encontros;
- d) Apresentou-se e tabulou-se os dados para então analisá-los.

4.2.3 Construção do Plano de Pesquisa e das Sessões Didáticas

Nessa etapa construímos um plano para realização da prática pedagógica da pesquisa a ser aplicada nas aulas as quais nos propomos conduzi-las para que o trabalho possa se concretizar. Construímos um questionário composto de 5 (cinco) problemas de geometria plana relacionados ao Teorema do Ângulo Externo e suas consequências para que fosse trabalhado pelos estudantes (professores em formação continuada) durante os encontros presenciais. Decidimos que a aplicação das atividades deveria ser desenvolvida tanto no velho papel e caneta como no ambiente de geometria dinâmica. Os 12 (doze) estudantes que participaram das atividades cursavam 2/3 (dois terços) da carga horária do Curso Semipresencial de Especialização no Ensino de Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) no município de Cascavel localizado no interior do Estado do Ceará. Dos 12 (doze) estudantes, 9 (nove) já haviam cursado a disciplina de Geometria Euclidiana Plana e alguns destes sabiam utilizar os recursos dos ambientes de geometria dinâmica e tinham certa habilidade com o software GeoGebra.

As sessões didáticas ocorreram no polo da universidade em 5 (cinco) encontros presenciais com 2(duas) semanas de intervalo entre ambos e que iniciaram com questionários semi estruturado, seguido da explanação do conteúdo “O Teorema do Ângulo Externo e suas consequências” pelo professor pesquisador que realizou a demonstração do teorema e resolveu problemas relativos ao objeto da pesquisa e finalizando com os encontros em que os

estudantes foram organizados em 6 (seis) duplas para resolverem as atividades durante 4 (quatro) horas destinadas aos dois ambientes (VPC e AVA).

Para cada problema do questionário foi realizada uma análise didática prévia, que consistia em um estudo das possíveis estratégias dos alunos em resolver a atividade e as dificuldades que eles poderiam encontrar durante a tentativa de resolução, a partir da análise dos resultados observados em outras pesquisas na área, que constituíram a revisão bibliográfica.

4.2.4 Procedimentos Didáticos realizados no Velho Papel e Caneta (VPC)

Nesta primeira etapa da pesquisa destacaremos os procedimentos adotados para realizar as atividades e as dificuldades enfrentadas pelos estudantes diante dos problemas de geometria sobre o Teorema do Ângulo Externo e suas consequências apresentados no questionário proposto. Apresentamos os materiais utilizados pelos alunos para realizar suas atividades tais como: esquadros, régua graduada, compasso e papel e lápis.

Mostraremos a seguir como ocorreu a realização das etapas da pesquisa e sucedeu a aplicação dos procedimentos didáticos adotados.

Como a turma de estudantes participantes da pesquisa realizavam encontros presenciais a cada 15 (quinze) dias, pudemos iniciar a primeira etapa da pesquisa abrangendo nos dois primeiros encontros uma carga horária de 4 (quatro) horas aulas para cada encontro a cada quinze dias.

1º Encontro: Momento em que apresentamos o projeto identificando o objetivo principal a que este se propunha, construímos coletivamente o contrato didático estabelecido para o momento da prática pedagógica e das sessões didáticas e em seguida aplicamos um questionário diagnóstico (Apêndice A) para saber o perfil e o contexto no qual os mesmos estão inseridos, suas habilidades com temas de geometria plana que foram aplicados em suas aulas, tipos de ferramentas utilizadas para dar aulas (material didático) e conhecimentos prévios de informática para utilizar como ferramenta de apoio pedagógico nas aulas. Foram apresentados também, os ambientes de aprendizagem (sala de aula e laboratório de informática) onde ocorreria a prática pedagógica da pesquisa.

2º Encontro: Momento em que o professor pesquisador realizou uma aula expositiva no quadro branco da sala de aula, abordando o assunto do trabalho “Teorema do Ângulo Externo

e suas consequências” para os alunos. No decorrer das atividades, foi aplicado um questionário (Apêndice B), contendo 5 (cinco) questões previamente selecionadas sobre o assunto em discussão para que os estudantes pudessem buscar suas soluções. Neste momento utilizou-se o VPC apresentando as noções básicas da geometria plana e as consequências do teorema para a resolução de problemas que pudessem usufruir de suas contribuições.

4.2.5 Procedimentos Didáticos realizados no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA)

Nesta segunda etapa da pesquisa, apresentaremos como ocorreram os encontros com as equipes diante do computador para realizarmos a prática laboratorial com o uso pedagógico do software GeoGebra.

3º Encontro: Neste encontro, foi apresentado o laboratório de informática chamado na pesquisa de Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) onde nele usamos o software GeoGebra como ferramenta virtual para resolver os mesmos problemas sobre o Teorema. Avaliamos as considerações dos alunos quanto aos questionários (1ª e 2ª parte) e a interação colaborativa dos mesmos no desenvolvimento das atividades.

4º Encontro: Foram destinadas 4 (quatro) horas aulas para que os estudantes pudessem resolver o questionário das questões apresentadas no segundo encontro para que fossem resolvidas utilizando o AVA e como ferramenta pedagógica o Software GeoGebra.

5º Encontro: Avaliação dos procedimentos didáticos VPC e AVA utilizados na resolução de problemas em que os estudantes puderam fazer suas considerações quanto aos questionários (1ª e 2ª parte) e a interação colaborativa dos mesmos durante o desenvolvimento das atividades comparando as metodologias utilizadas nos dois ambientes.

Destacaremos a seguir as ações que foram realizadas desde o encontro em que os estudantes foram entrevistados para participar da pesquisa aos momentos em que pudemos indagar sobre metodologias utilizadas em suas aulas como professores de matemática para ensinar geometria de forma simples e atrativa. Pudemos também obter informações quanto o uso do computador pelos professores para aprimorar suas aulas com a utilização de softwares de geometria dinâmica.

Na primeira parte da pesquisa aplicamos um questionário com o objetivo de determinar o perfil do grupo de professores de matemática, idades, trabalhos e conhecimentos prévios de geometria plana, os elementos a serem utilizados para resolver problemas sobre o

teorema do ângulo externo e a utilização do computador através de softwares para resolver problemas semelhantes aos resolvidos no velho papel e caneta (VPC).

◆ Os sujeitos da pesquisa

Durante a realização dos primeiros contatos com os estudantes que eram professores de matemática em formação continuada para a participação na pesquisa seguimos os seguintes critérios:

- O professor-pesquisador na condição de professor da turma em uma disciplina de *Laboratório de Matemática*⁵ pôde perceber a capacidade que a turma apresentava para que pudessemos realizar as etapas pedagógicas da pesquisa e em virtude do grupo ser de poucos professores pudemos tomar a amostra como um todo.

- Realizamos uma negociação com a turma, o professor da disciplina *Projeto de Pesquisa*⁶ e a coordenadora do curso para que a pesquisa pudesse ser realizada durante as aulas e para que pudessem utilizar as conclusões para aprimorar seus projetos. Desta forma, as aulas ocorreram nos encontros quinzenalmente e aos sábados.

- Durante a explanação dos conteúdos no VPC sobre o teorema do ângulo externo, foi possível perceber pelo professor-pesquisador o grau de dificuldade que boa parte dos professores participantes da pesquisa apresentavam durante as atividades propostas e através de diálogos informais que os mesmos comentavam.

- Por conseguinte, foi discutido junto aos estudantes o valor do uso das metodologias que fazem uso das TIC em sala de aula e em especial o uso do *Geogebra* para que pudesse contribuir de forma significativa para o processo de ensino dos conteúdos de geometria. Destas discussões tiraram-se ricas experiências para a construção de aulas colaborativas e mais dinâmicas.

◆ Descrição do ambiente da pesquisa

Descreveremos a seguir as características do espaço físico utilizado para a realização da pesquisa durante os encontros realizados.

- O ambiente físico utilizado para os encontros foi o laboratório de informática da Trinus Educação e Cultura de Cascavel – Pólo da UVA - CE, onde dispomos de 30 máquinas com configurações de última geração e com o sistema operacional Windows. Inicialmente as aulas foram ministradas no quadro branco instalado dentro do laboratório utilizando pincel e

⁶ Disciplina ministrada no curso de formação continuada como prática de Laboratório de Geometria.

apagador para ministrar os conceitos a serem discutidos e papel, canetas, lápis e borracha utilizados pelos estudantes participantes.

- Durante a realização das sessões didáticas no laboratório de informática, cada estudante pode se apropriar de um computador individualmente e posteriormente foram formadas as duplas para resolver as atividades propostas. Desta forma, concordamos com Valente (1999, p.91) quando afirma que o uso do computador na sociedade do conhecimento pode ser um importante recurso para promover a passagem da informação ao usuário ou facilitar o processo de construção do conhecimento.

- A UVA de Cascavel tem convênio com a empresa Trinus Educação e Cultura e conta com uma ampla estrutura física dispondo de 15 salas de aulas, uma biblioteca e um espaçoso laboratório de informática onde ministramos os encontros da pesquisa. Neste polo, funcionam cursos de graduação e de pós-graduação nas diversas áreas de atuação. O professor-pesquisador mantém parceria com o pólo da UVA por ser professor contratado para ministrar algumas disciplinas nos cursos da área de exatas.

- Foi instalado o software *Geogebra* em todas as máquinas do laboratório para ser usado nas sessões didáticas que demandam um ambiente virtual. Como é de fácil manuseio, o software possibilitou aos estudantes uma rápida familiaridade para entender seus comandos e campos de entrada para construírem as figuras geométricas que a pesquisa propunha.

- A prática pedagógica foi ministrada pelo professor-pesquisador através de aulas teóricas e prática com auxílio dos recursos manuais (papel e lápis) e computacionais (software), propondo alternativas que permitissem aos estudantes utilizar recursos diversificados em suas aulas com seus alunos.

◆ Descrição da aplicação

Durante as atividades desenvolvidas no processo de construção da pesquisa, os estudantes passaram a se relacionar em regime de colaboração e vimos a necessidade de se formar duplas para que pudessem discutir, tirar dúvidas e construir a solução dos problemas propostos de forma coparticipativa. Esses momentos foram realizados da seguinte forma:

- Cada grupo formado tinha acesso a um computador, conectado a internet e instalado a última e mais recente versão 4.4 do *software* GeoGebra onde puderam gravar em seus *pen drives* o resultado encontrado para cada problema ao final de cada sessão didática, ficando uma cópia sempre com o professor-pesquisador.

- No primeiro encontro fizemos uma leitura do ambiente de trabalho, recursos a serem utilizados e relacionamento com os colegas para tornar os momentos do trabalho agradáveis e sociáveis nas relações de familiaridade entre os participantes da pesquisa.

- Durante os demais encontros os grupos já apresentavam bons relacionamentos entre si e com o professor-pesquisador e foram iniciadas as sessões didáticas com aulas teóricas sobre o assunto do teorema do ângulo externo, resolução de problemas pelo professor-pesquisador para a familiaridade das equipes com o assunto, aplicação de questionário propostos para discussão nos grupos em na busca da solução destes e reconhecimento do software Geogebra pelos grupos uma vez que todos já haviam trabalhado com ele em outros momentos do curso ou nas escolas em que lecionavam.

Pudemos observar a boa participação dos sujeitos participantes da pesquisa utilizando as ferramentas de aprendizagem para resolver o questionário de problemas envolvendo o objeto de estudo da pesquisa e poder fazer suas inferências e tirar conclusões sobre as atividades realizadas.

Apresentaremos no próximo capítulo, a análise dos resultados da pesquisa, discussões e sugestões apresentadas pelos envolvidos no trabalho (estudantes e professor pesquisador) para que possam contribuir para a melhoria do ensino de geometria tanto no VPC como no AVA designados pelos professores de matemática e/ou de disciplinas afins.

5. ANALISES E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Neste capítulo mostraremos a apresentação da análise e a discussão dos resultados obtidos durante a pesquisa realizada.

Ao realizar a análise e discussão dos resultados da pesquisa observamos quanto é importante identificarmos em caráter científico quais as características dos participantes, quais as dificuldades que os professores apresentam em relação ao conteúdo explorado e em que situações propormos estratégias que venham amenizar os problemas identificados a partir da análise das informações da pesquisa, de forma a contribuir para a melhoria do processo educacional, que em foco buscamos o melhor desempenho no ensino para a aquisição da aprendizagem dos alunos de matemática.

Como já relatamos no capítulo anterior, iniciamos as atividades realizando encontros nos sábados durante os meses de Agosto e Setembro de 2014. No primeiro contato com o grupo de estudantes (professores em formação continuada), tentamos motivá-los a se envolverem e participarem assiduamente dos momentos de discussão e debates que iriam se aflorar no decorrer das etapas que a pesquisa se propunha desenvolver. Os encontros ocorreram no polo da Universidade Estadual Vale do Acaraú em Cascavel-Ce com momentos na sala de aula denominado (VPC) e no laboratório de informática chamado de (AVA).

5.1 Análise e Diagnóstico dos Elementos da Pesquisa

Apresentaremos a seguir como se desenvolveram as atividades nos encontros que realizamos para acontecer a prática experimental da pesquisa, analisando e discutindo as conclusões que os estudantes apresentavam durante cada etapa da investigação.

A adesão do grupo de pesquisa se deu após uma reunião com os estudantes numa aula da disciplina *Projeto de Pesquisa* realizada num sábado de encontros presenciais em que pudemos apresentar a proposta do trabalho e mostrar a importância da pesquisa para suas formações e para a comunidade escolar.

Concretizamos a elaboração e organização dos instrumentais da pesquisa através de questionários, planos de aula, recursos tecnológicos e formação do grupo de 12 professores da Turma de Especialização no Ensino de Matemática.

No primeiro encontro realizado no dia 09 de Agosto 2014 objetivou-se em apresentar a proposta do trabalho de investigação a que nos propomos realizar e buscar

conhecer os participantes, suas expectativas e anseios em participar da pesquisa e quais as contribuições que o trabalho lhes proporcionaria para suas formações como professores especialistas no ensino de Matemática. No ensejo, ouvimos os comentários dos participantes que se expressaram de forma oral para o professor – pesquisador em relação aos seus anseios ao participarem do trabalho. Destacaremos algumas das considerações dos professores sobre esses questionamentos:

- *Mostraram-se empolgados e satisfeitos em fazer parte de uma pesquisa de dissertação de mestrado, pois serviria de aporte para a progressão continuada de suas formações.*
- *Comentaram das dificuldades que encontravam em realizar atividades diferenciadas em sala de aula por falta de equipamentos de mídia (computador) à disposição dos professores e alunos.*
- *Argumentaram ser importante o uso do computador no ensino de matemática para prender a atenção dos alunos e desenvolver melhor suas habilidades cognitivas neste campo do conhecimento, pois os mesmos se mostravam desmotivados e totalmente desinteressados em ir para a escola.*

Dos doze estudantes que compunham a turma, todos responderam o questionário, e desta forma agrupamos as principais informações obtidas e organizamos essas questões de modo uniformizar a apresentação dos dados obtidos.

Na fase inicial (1ª parte) do questionário (Apêndice A) buscamos informações pessoais dos estudantes bem como seus interesses e dificuldades enfrentadas no ensino de matemática. Das respostas colhidas 2 (16,7%) alunos informaram ter idade 21 e 25 anos, 2 (16,7%) com 26 a 30 anos, 4 (33,3%) com 31 a 35 anos e 4 com mais de 36 anos, 5 (41,7%) são do sexo feminino e 8 (58,3%) sexo masculino, todos trabalham como professor a mais de 2 anos na rede pública de ensino e buscam ferramentas que possam auxiliá-los diante das dificuldades que enfrentam em sala de aula. Vejamos a tabela 1 que mostra essas informações.

Tabela 1 – Respostas dos estudantes às questões relativas ao sexo, idade e tempo de profissão no campo educacional (dados coletados do questionário – Apêndice A)

Perguntas	Respostas				
	Até 20 anos	21 a 25 anos	26 a 30 anos	31 a 35 anos	Mais de 36 anos
01. Qual a sua idade?	--	2	2	4	4

“Conclusão”

Perguntas	Respostas		
	02. Sexo?	Masculino	Feminino
7		5	
04. Você trabalha como professor do Ensino Fundamental?	Sim	Não	
	12	--	
06. A escola em que trabalha pertence a qual das redes de ensino?	Pública	Particular	Ambas as redes
	12	--	--

Fonte: Próprio autor.

Na fase intermediária (2ª parte), as questões destinaram-se analisar os conhecimentos básicos de Geometria que os estudantes possuíam, a intimidade com o Teorema do Ângulo Externo e habilidades para demonstrá-lo. As respostas mostraram indícios preliminares onde 9 (75%) dos 12 entrevistados já haviam cursado uma disciplina de geometria plana, detinham de alguma noção básica de Geometria Plana e que desta forma conheciam o Teorema do Ângulo Externo, mas tinham dificuldades em demonstrá-lo. As respostas foram quantificadas na tabela 2.

Tabela 2 – Respostas dos estudantes às questões objetivas quanto ao conhecimento e utilização da geometria nas aulas em destaque o Teorema do Ângulo Externo (dados coletados do questionário – Apêndice A)

Questões	Respostas	
	Sim (%)	Não (%)
09. Você fez alguma disciplina de Geometria Plana durante o Curso de Licenciatura?	9 (75)	3 (25)
11. Você tem alguma noção básica de Geometria Plana?	12 (100)	0 (0)
12. Você conhece o Teorema do Ângulo Externo?	11 (91,7)	1 (8,3)
13. Você já fez alguma demonstração do Teorema do Ângulo Externo para seus alunos?	5 (41,7)	7 (58,3)
15. Reconhece uma representação geométrica do Teorema do Ângulo Externo?	9 (75)	3(25)

Fonte: Dados do professor- pesquisador.

Na fase final do questionário as questões buscavam levantar sinais preliminares em relação o uso do computador como prática pedagógica da sala de aula ou de planejamento das

atividades dos professores, o conhecimento de algum software de geometria dinâmica, domínio em manuseá-lo e do interesse em utilizá-lo como ferramenta de apoio pedagógico em suas aulas. Como respostas, a maioria dos professores disseram ter computador em casa, dominar parcialmente noções básicas de informática, às vezes utiliza o computador como prático de sala de aula, mas conhecem software de geometria dinâmica, mas a maioria não usa como ferramenta de apoio pedagógico em suas aulas. As respostas foram quantificadas na tabela 3.

Tabela 3 – Respostas dos estudantes às questões objetivas quanto ao uso do computador como ferramenta pedagógica e conhecimento de software de geometria dinâmica (dados coletados do questionário – Apêndice A)

Questões	Respostas						
	Sim (%)	Às vezes (%)	Difícil-mente (%)	Nunca (%)	Nenhum (%)	Parcial-mente (%)	Totalmente (%)
18. Você tem computador para uso diário em casa ou na escola?	10 (83,3)	2 (16,7)	-	-	-	-	-
19. Você tem domínio da informática básica?	-	-	-	-	-	9 (75)	3 (25)
20. Utiliza o computador como ferramenta pedagógica da prática de sala de aula?	1 (8,3)	6 (50)	5 (41,7)	-	-	-	-
21. Você conhece algum software matemático que te auxilie nas atividades de sala de aula?	12 (100)	-	-	-	-	-	-
22. Você tem domínio de algum software matemático para fins pedagógicos?	-	-	-	-	-	11 (91,7)	1 (8,3)

“Conclusão”

Questões	Respostas						
	Sim (%)	Às vezes (%)	Difícil-mente (%)	Nunca (%)	Nenhum (%)	Parcial-mente (%)	Totalmente (%)
23. Planeja suas aulas com aplicações do uso do software?	1 (8,3)	4 (33,3)	7 (58,3)	-	-	-	-
24. Você já resolveu algum problema de geometria associado ao Teorema do Ângulo Externo utilizando o ambiente virtual (software)?	2 (16,7)	-	-	10(83,3)	-	-	-
25. Qual seu grau de interesse em trabalhar com uma ferramenta computacional (software) para resolver problemas de geometria plana para seus alunos?	-	-	-	-	-	4 (33,3)	8 (66,7)

Fonte: Próprio autor.

Fazendo uma análise do perfil dos estudantes participantes da pesquisa pudemos perceber que são professores do Ensino Fundamental das escolas públicas do município de Cascavel-Ce e municípios vizinhos que enfrentando muitas dificuldades nas escolas anseiam por mudanças no currículo escolar, desejam utilizar as novas tecnologias como ferramentas metodológicas para o ensino de matemática e melhorar suas aulas para que sejam mais atrativas e despertem nos seus alunos o desejo pela disciplina e consigam adquirir a aprendizagem significativa.

5.2 Análise da Aplicação do Questionário Velho Papel e Caneta (VPC)

Na perspectiva de aplicar a segunda etapa da pesquisa no dia 6 de Setembro com a

explicação teórica do teorema do ângulo externo e suas consequências, o professor-pesquisador se fundamentou de ferramentas básicas e claras do estudo de geometria quanto ao conceito de ponto, reta, ângulo e congruência para demonstrar de forma clássica e sem rodeios o enunciado do teorema. Como se observou no Capítulo 4, o teorema tem um enunciado formal e sua demonstração feita apenas por construção de triângulos, uso de ângulos opostos pelo vértice e utilizando congruências de triângulos.

Para alguns estudantes do grupo de pesquisa a forma como foi apresentado o teorema do ângulo externo pelo professor-pesquisador não era do conhecimento destes e com uma demonstração simples que eles desconheciam. Quando o contrato didático foi elaborado pelo professor pesquisador e os estudantes participantes da pesquisa ficou acordado por todos que parte das atividades como forma de tirar dúvidas seriam realizadas via e-mail e postadas como mensagem para que pudessem se aprimorar e melhorar suas práticas no conteúdo de geometria.

Selecionamos a seguir, os depoimentos de três estudantes do grupo de pesquisa quanto à aplicabilidade do teorema do ângulo externo:

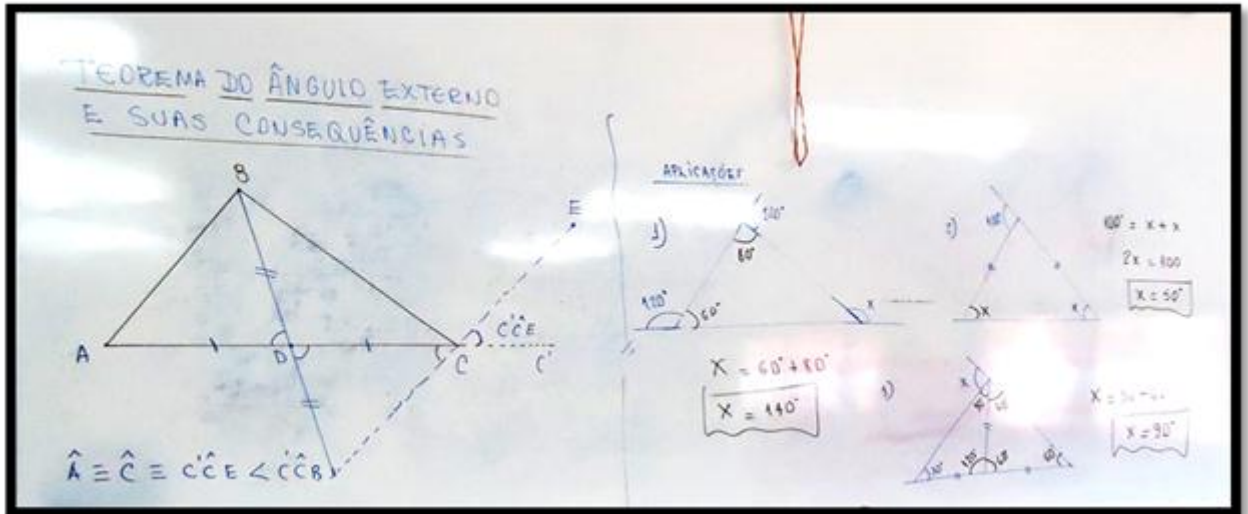
Estudante 1: Eu conheço o teorema do ângulo externo pelo enunciado: “Em qualquer triângulo, o ângulo externo é igual à soma dos outros dois não adjacentes”. Não conhecia este enunciado.

Estudante 2: Tenho dificuldade em demonstrar para meus alunos. Acho que eles não entenderiam.

Estudante 3: Quase não temos o estudo de geometria associado ao currículo no ensino fundamental (cai no esquecimento), por isso temos dificuldade de aplicá-la em sala de aula.

Vejamos uma explicação do conteúdo abordado pelo professor-pesquisador no início da prática pedagógica no quadro branco da sala de aula

FIGURA 15: Registro da aula expositiva sobre o Teorema do Ângulo Externo aplicada pelo professor-pesquisador sala de aula durante o 2º encontro da prática pedagógica da pesquisa.



Fonte: Próprio autor.

Dando continuidade às atividades, o professor-pesquisador resolveu um conjunto de problemas direcionados à aplicação do teorema do ângulo externo para que os estudantes do grupo se familiarizassem com a aplicabilidade deste a outros problemas futuramente propostos a resolução.

No segundo encontro desta segunda etapa da pesquisa, o professor-pesquisador aplicou um questionário semiestruturado contendo 5 (cinco) questões (Apêndice B) envolvendo o assunto teorema do ângulo externo e suas consequências dentre as quais, 3 (três) eram subjetiva-discursivas e 2 (duas) objetivas. O grupo de 12 (doze) estudantes foi dividido em 6 (seis) duplas para que juntos pudessem encontrar as respostas do questionário proposto no ambiente papel e lápis. O critério de formação das duplas ocorreu sempre observando os estudantes que apresentavam maior dificuldade com aqueles de melhor desempenho durante as atividades. Esse processo de escolha surgiu da percepção do professor-pesquisador quando analisou a maior interação no regime de colaboração entre os colegas participantes quando no grupo, alguns apresentavam suas resoluções e compartilhavam suas dificuldades e avanços no decorrer do processo pedagógico.

Algumas duplas mostraram-se de início desestimuladas sem conseguir encontrar a solução para os problemas propostos no questionário. As grandes dificuldades enfrentadas nas primeiras questões por alguns foram sobre noções básicas de geometria plana: *congruência de segmentos e ângulos suplementares*. Isto os impediam de resolver os problemas aplicando o teorema do ângulo externo. Porém, essas duplas se superaram e em

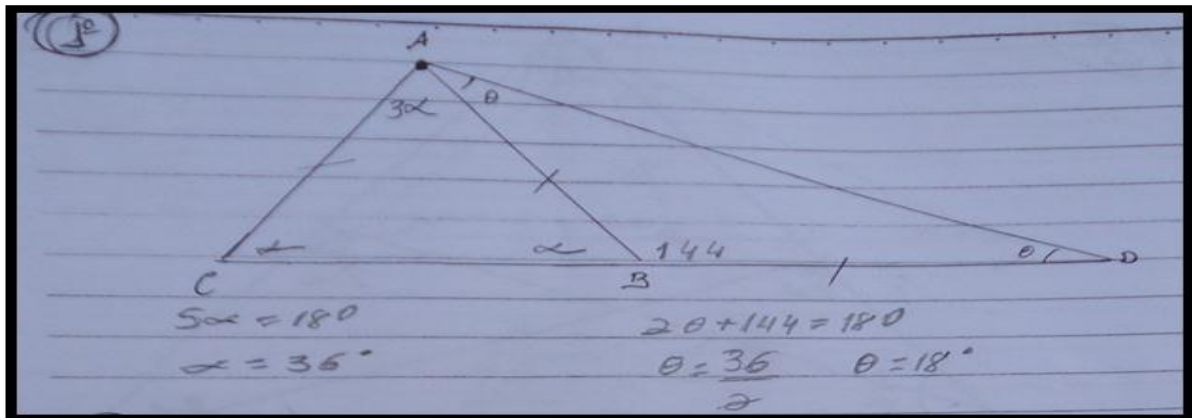
regime de colaboração conseguiram dar os primeiros passos para encontrar a solução desejada.

Em outras 3 (três) duplas a agilidade na resolução ocorria com maior facilidade e em curtos espaços de tempo chegavam à solução procurada nos problemas propostos. Usando sempre o APL, os grupos aos poucos concluíram suas soluções e apresentaram ao professor-pesquisador o resultado encontrado.

Vejamos alguns depoimentos e soluções dos problemas desenvolvidas pelas equipes.

Dupla 1: *Conseguimos resolver as questões 1, 4, e 5 usando construção de congruência e pouca manipulação algébrica.*

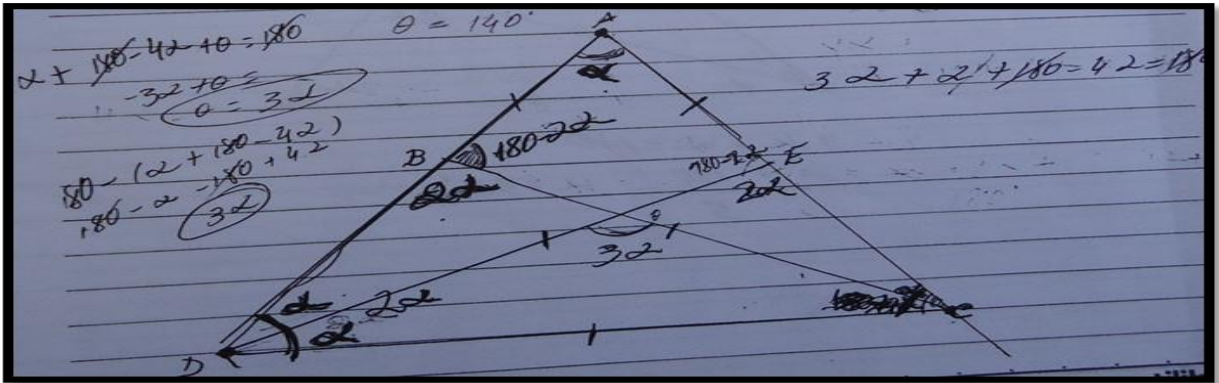
FIGURA 16: Registro da resolução da questão 1 retirado do caderno da dupla 1.



Fonte: Próprio autor.

A solução encontrada para 1ª questão do questionário no VPC pela dupla participante não tomou muito espaço pois desenhar a figura novamente foi uma forma encontrada pelos estudantes que facilitou encontrar a solução.

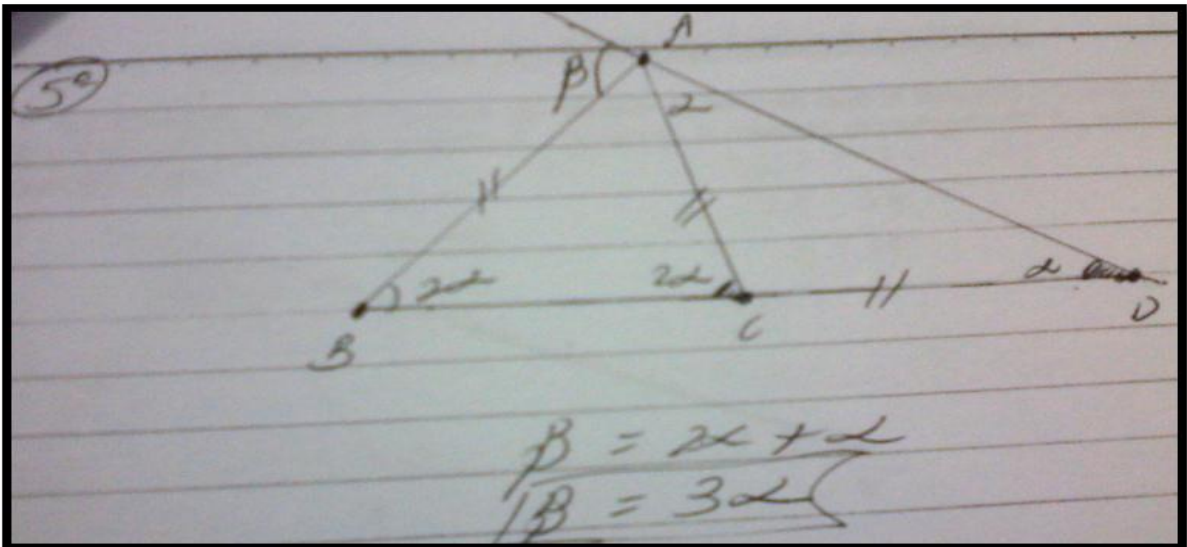
FIGURA 17: Registro da resolução da questão 4 retirado do caderno da dupla 1.



Fonte: Próprio autor.

A dupla utilizou a mesma estratégia da questão 1 para resolver a questão 4 fazendo desta vez uma pequena manipulação algébrica.

FIGURA 18: Registro da resolução da questão 5 retirado do caderno da dupla 1.

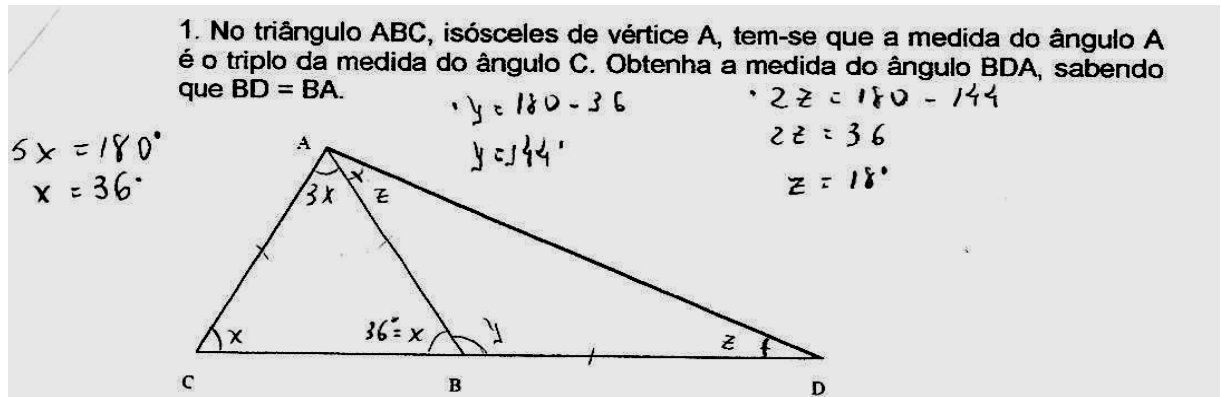


Fonte: Próprio autor.

Para a questão 5 a dupla apenas utilizou congruência de pouca manipulação algébrica, mas mesmo assim conseguiu encontrar a solução correta do problema.

Dupla 2: As questões 1, 2 e 3 foram resolvidas na própria figura porque nos deu uma melhor visão dos detalhes.

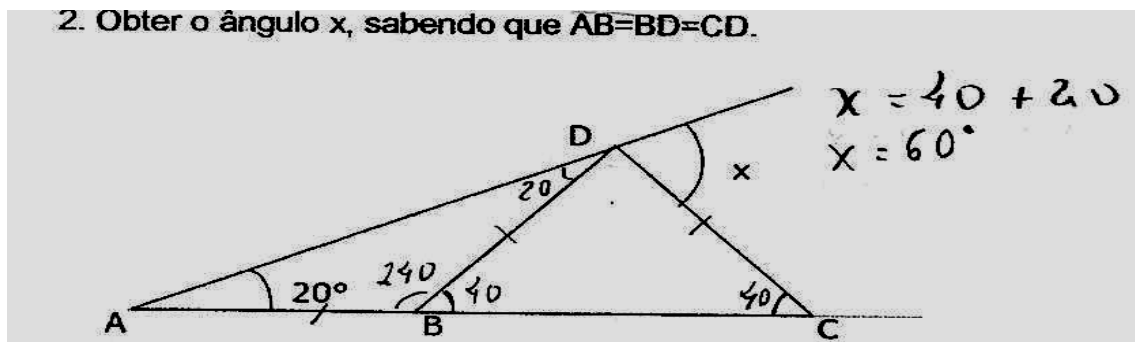
FIGURA 19: Registro da resolução da questão 1 retirado do caderno da dupla 2.



Fonte: Próprio autor.

A dupla 2 utilizou a figura que se encontrava no próprio questionário e com poucos cálculos encontrou a solução correta do problema.

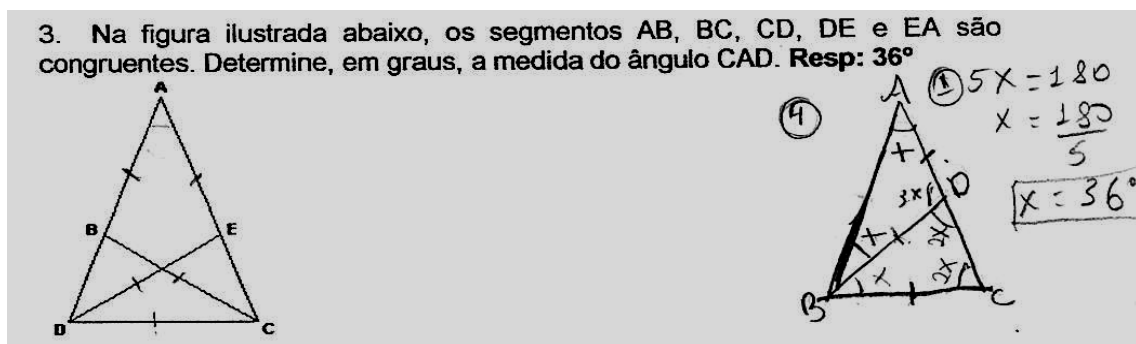
FIGURA 20: Registro da resolução da questão 2 retirado do caderno da dupla 2.



Fonte: Próprio autor.

Na questão 2 apenas usaram congruência para encontrar na própria figura a medida dos ângulos e descobrir a medida do ângulo externo do triângulo ADC.

FIGURA 21: Registro da resolução da questão 3 retirado do caderno da dupla 2.



Fonte: Próprio autor.

A questão 3 mesmo sendo totalmente subjetiva levou a dupla a utilizar estratégias de manipulação algébrica colocando os ângulos internos em cada triângulo para encontrar a solução do problema.

***Dupla 3:** Não resolvemos a questão 4, pois é muito conceitual e não tem a figura para que pudéssemos visualizar melhor o enunciado.*

FIGURA 22: Registro da resolução da questão 4 retirado do caderno da dupla 3.

4. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e DC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo BÂC é igual a:

a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

Fonte: Próprio autor.

A questão 4 mesmo sendo objetiva ofereceu resistência à dupla 3 pois tiveram dificuldades em construir a figura pelo enunciado e desta forma não tiveram êxito na solução do problema.

Uma situação que apresentou grande relevância para a análise do professor pesquisador foi o fato de que os grupos foram formados de forma heterogêneos mantendo sempre um aluno de bom rendimento com outro de baixo rendimento e, contudo algumas duplas superaram outras. Para o professor pesquisador os conceitos iniciais de geometria apresentados antes da resolução de problemas facilitaram para alguns na busca de suas soluções e grande parte dos estudantes ainda apresentaram dificuldades de resolver problemas conceituais.

5.3 Análise da Aplicação do Questionário no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA)

No terceiro encontro da segunda fase da pesquisa, ou seja, na etapa final dos trabalhos no dia 27 de Setembro, o professor-pesquisador direcionou a turma ao laboratório de informática do Campus da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA vinculada à Trinus Educação e Cultura da cidade de Cascavel-Ce, para realizar a prática pedagógica virtual da pesquisa.

Da mesma forma como no encontro anterior, as duplas reuniram-se e tomando o questionário com as mesmas questões propostas anteriormente (Apêndice B), puderam interagir com os computadores do laboratório para então realizar suas atividades.

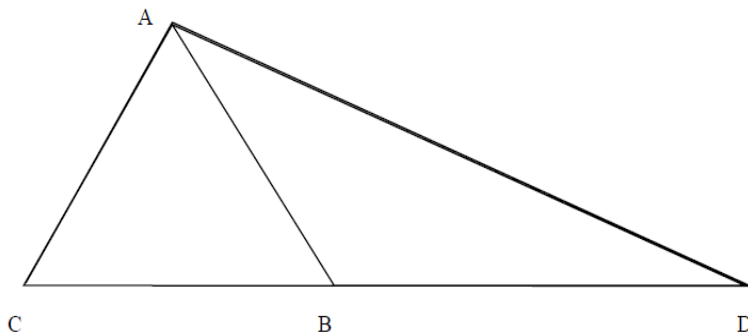
Como ficou acordado no contrato didático estabelecido em parceria pelo grupo e o professor pesquisador, cada dupla tomaria um computador para si e fariam a prática para resolver os problemas propostos usando agora o software GeoGebra que já havia sido instalado em todas as máquinas do laboratório de informática.

Os estudantes que fizeram parte da pesquisa já haviam trabalhado com o *Software GeoGebra* e isto deixou o primeiro momento dessa prática pedagógica apenas para que fizessem um reconhecimento do ambiente e construíssem alguns elementos geométricos que seriam utilizados na resolução dos problemas propostos no segundo questionário (Apêndice B).

Começado o momento da prática pedagógica no laboratório de informática, as duplas receberam o questionário do professor pesquisador para que comesçassem suas atividades de busca da solução dos problemas propostos na tela do software. O professor pesquisador passou a observar o trabalho iniciado pelas duplas, suas interações e cooperações e anotar os avanços e dificuldades que estas apresentavam durante a atividade prática diante do computador.

A primeira questão do questionário se apresentava como problema discursivo e para algumas duplas essa estrutura dificultava sua compreensão e de encontrar sua solução. Outras duplas encontravam os resultados na mesma questão com mais facilidade de entendimento e, portanto resolveram o problema mais rapidamente.

Questão 1: No triângulo ABC, isósceles de vértice A, tem-se que a medida do ângulo A é o triplo da medida do ângulo C. Obtenha a medida do ângulo BDA, sabendo que $BD = BA$.



Vejam alguns depoimentos das duplas na busca da solução da primeira questão:

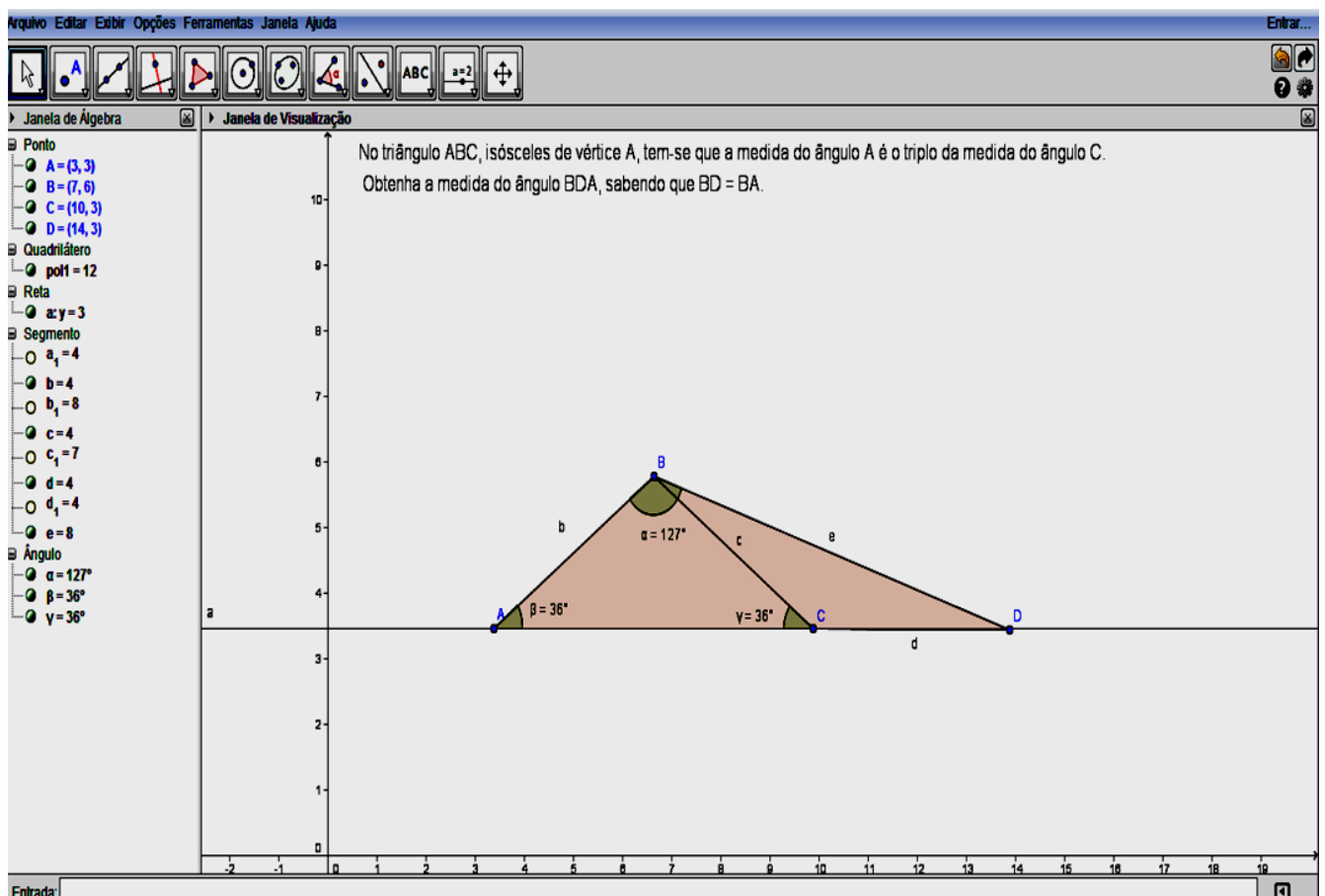
Dupla 1: Não conseguimos construir um triângulo isósceles a partir das informações do problema, pois temos dificuldades de construir os ângulos.

Dupla 2: Conseguimos construir o triângulo pelos lados fixos e assim ficou mais fácil. Tentamos várias vezes e só então conseguimos resolver o problema.

Dupla 3: Fixamos os lados no campo de entrada da interface do software e conseguimos a resposta rapidinho.

Para justificar o depoimento das turmas que conseguiram resolver o primeiro problema usando a ferramenta virtual do Software GeoGebra, apresentamos na figura a seguir a construção da solução adquirida pela dupla 3.

FIGURA 23: Registro da solução encontrada para a primeira questão do questionário 2(Apêndice B) pela dupla 3 durante o 4º encontro da prática pedagógica da pesquisa no laboratório de informática.



Fonte: Próprio autor.

Para encontrar a solução da questão 2, as duplas utilizaram diversos artifícios oferecidos pelo software para que com bastante dificuldade chegassem à resposta correta. No

entanto ao observarmos a solução na figura percebemos um erro na solução e como a construção da figura foi feita na janela geométrica do GeoGebra, pode-se notar um erro de manipulação por parte da dupla. Novamente o pesquisador pôde perceber a dificuldade que os estudantes apresentavam quando o problema apresentava uma estrutura subjetiva, com dados apenas teóricos e abstratos do ponto de vista geométrico.

Questão 2: . Obter o ângulo x , sabendo que $AB=BD=CD$.

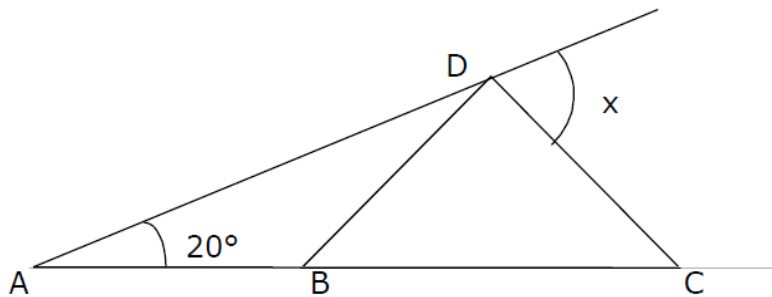
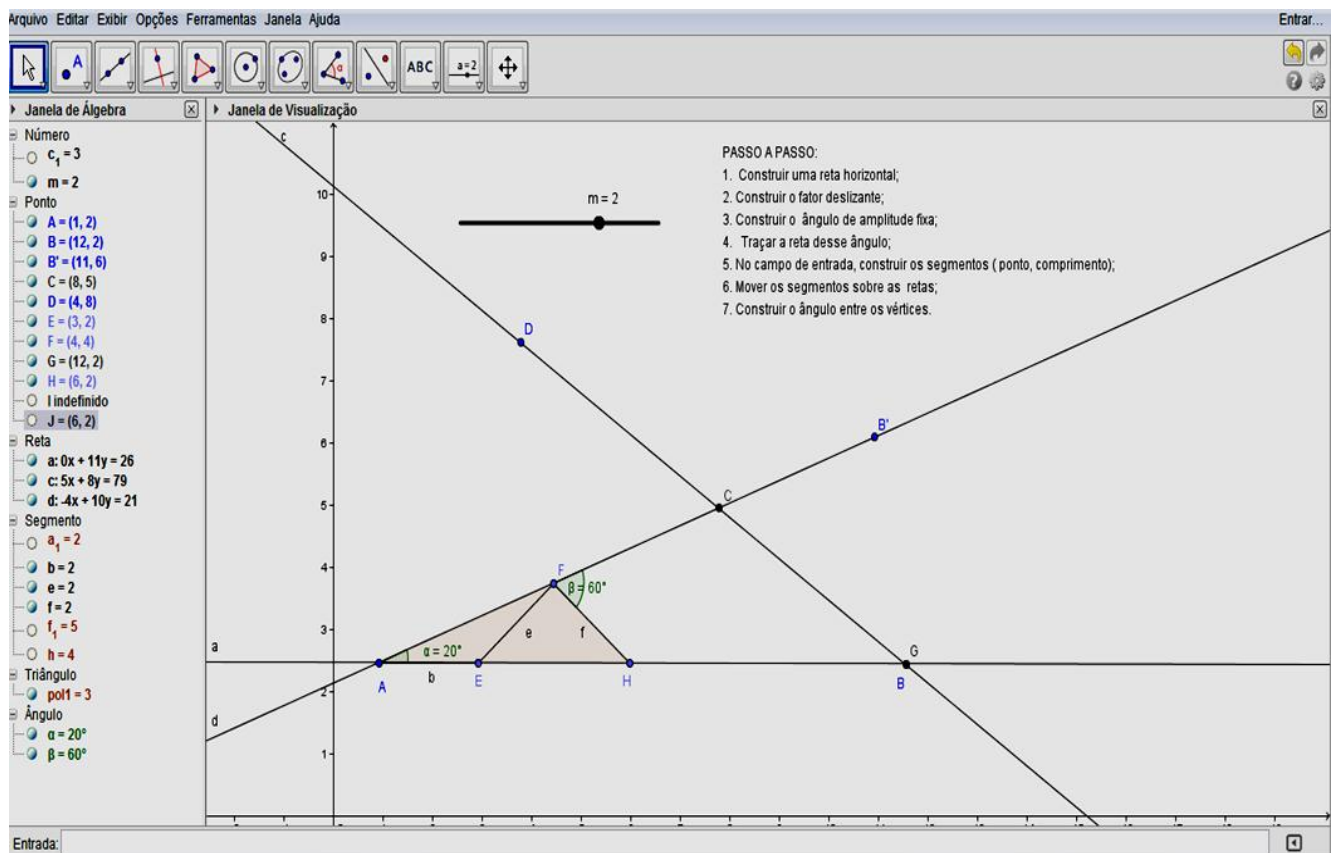


FIGURA 24: Registro da solução encontrada para a segunda questão do questionário 2 (Apêndice B) pela dupla 4 durante o 4º encontro da prática pedagógica da pesquisa no laboratório de informática.



Fonte: Próprio autor.

Ao final de várias tentativas, todas as duplas conseguiram a solução do problema da questão 2 usando estratégias do próprio software que contou com ajuda do professor pesquisador mediando possibilidades de construção de figuras.

A questão 3 do questionário foi resolvida apenas por uma das duplas que conseguiu a resposta usando diretamente o conceito adquirido na fundamentação teórica do *teorema do ângulo externo* apresentada no início da pesquisada pelo professor pesquisador. As demais duplas não conseguiram ter a mesma ideia e desistiram após várias tentativas. Esta questão também se apresentou bastante teórica e subjetiva na visão dos estudantes pesquisadores.

Questão 3: Na figura ilustrada abaixo, os segmentos AB, BC, CD, DE e EA são congruentes. Determine, em graus, a medida do ângulo CAD.

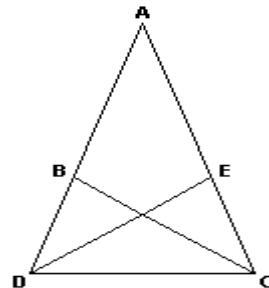


FIGURA 25: Registro da solução encontrada para a terceira questão do questionário 2 (Apêndice B) pela dupla 4 durante o 4º encontro da prática pedagógica da pesquisa no laboratório de informática.

3. Na figura ilustrada abaixo, os segmentos AB, BC, CD, DE e EA são congruentes. Determine, em graus, a medida do ângulo CAD.

PASSO A PASSO:

1. Construir um triângulo a partir de retas concorrentes.
2. No campo de entrada construir os segmentos de tamanho fixo.
3. Manipular a figura para que todos os segmentos se encachem no triângulo.
4. Tomar a medida do ângulo DAC.

Fonte: Próprio autor.

Observe que a dupla utilizou ferramentas do Geogebra que não fazem parte diretamente do enunciado do objeto da pesquisa para resolver o problema. A noção de retas concorrentes ajudou os estudantes a construir suas inferências e encontrar a solução procurada.

Para as demais questões do questionário (questões 4 e 5) as duplas tiveram resultados bastante relevantes quando passaram a resolvê-las usando as ferramentas do software corretamente com argumentos sofisticados para a solução. Vale ressaltar que essas questões se mostraram objetivas e com estrutura geométrica bem definida para que possibilitasse uma facilidade na busca da solução. As questões seguem abaixo e mostram o grau de dificuldade oferecido aos nossos estudantes agentes da pesquisa.

Questão4: Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo \widehat{BAC} é igual a:

- a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

A figura 26 mostra em detalhe a solução da questão 4 encontrada por uma das duplas escolhidas por sorteio para que apresentassem sua produção para servir de prova para o enriquecimento do trabalho.

FIGURA 26: Registro da solução encontrada da questão 4 do questionário 2 (Apêndice B) por uma das duplas durante o 4º encontro da prática pedagógica da pesquisa no laboratório de informática.

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda Entrar...

Janela de Álgebra Janela de Visualização

Número
 $m = 4$
 $n = 3$

Ponto
 $A = (6, 7)$
 $B = (5, 3)$
 $C = (7, 3)$
 $D = (7, 4)$
 $E = (5, 3)$
 $F = (7, 3)$

Segmento
 $a = 4$
 $a_1 = 3$
 $b = 4$
 $c = 3$
 $d = 3$
 $e = 3$
 $e_1 = 4$
 $f = 4$

Triângulo
 $pol1 = 5$

Ângulo
 $\alpha = 36^\circ$

Seja ABC um triângulo isósceles de base BC.
 Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D
 tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo \widehat{BAC} é igual a:
 a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

$n = 3$ $m = 4$

1. Construir um ponto A;
 2. Construir o fator deslizante **Texto lexio2**
 3. Construir os segmentos a partir do ponto A e do fator deslizante m;
 4. Mover os segmentos a formar um triângulo;
 5. Construir o fator deslizante n;
 6. Construir os segmentos a partir do ponto A e do fator deslizante n;
 7. Construir o ângulo desejado.

Entrada:

Fonte: Próprio autor.

Como é possível observar, as duplas utilizaram recursos bem aprofundados do GeoGebra como fator deslizante e construção de ângulos para produzir a figura e encontrar a solução correta do problema.

Questão 5: Na figura a seguir, os segmentos de reta AB, AC e CD são congruentes, β é um ângulo externo, e α um ângulo interno do triângulo ABD. Assinale a opção que contém a expressão correta de β em termos de α .

- a) $\beta = 3\alpha$ b) $\beta = 2\alpha$ c) $\beta = \alpha/2$ d) $\beta = 2\alpha/3$ e) $\beta = 3\alpha/2$.

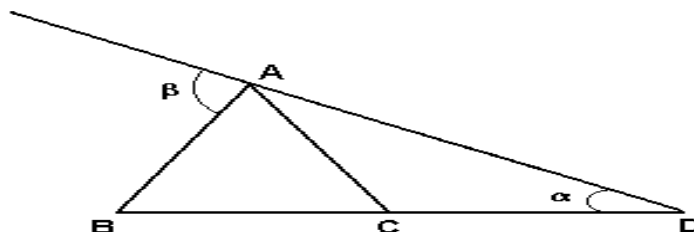
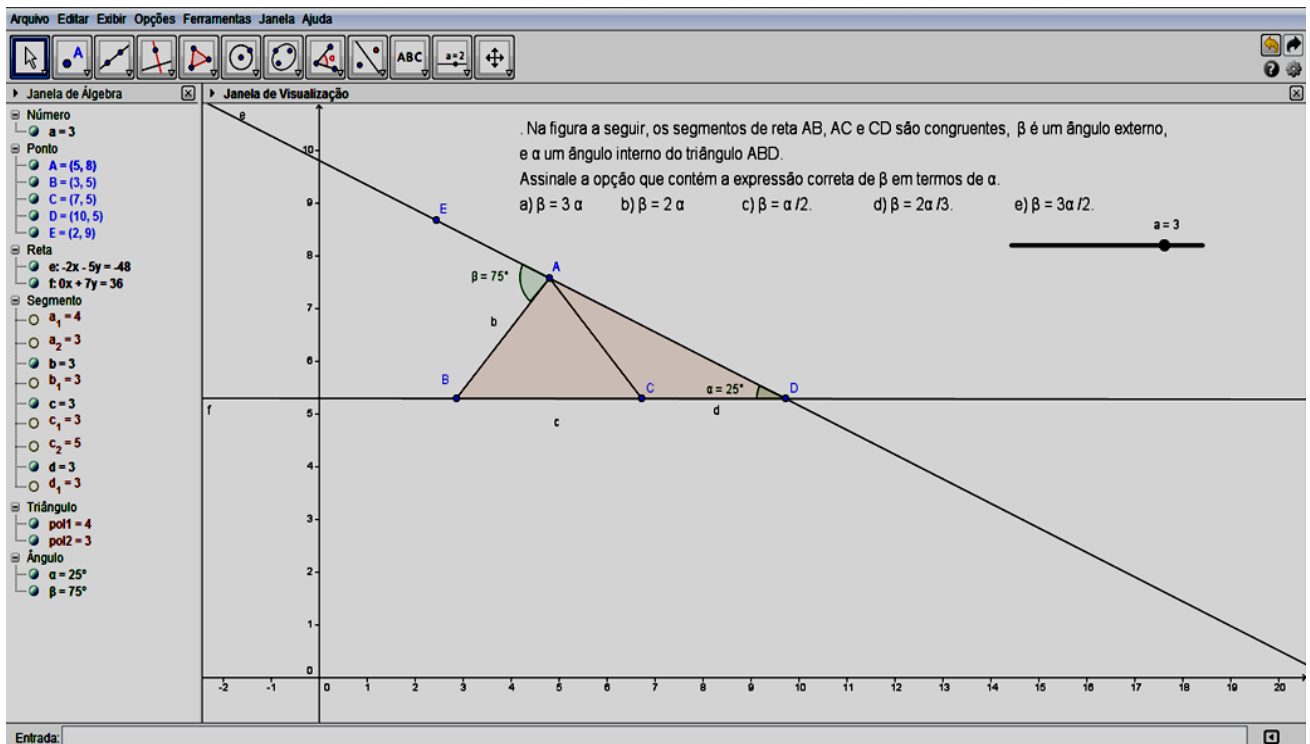


FIGURA 27: Registro da solução encontrada da questão 5 do questionário 2 (Apêndice B) por uma das duplas durante o 4º encontro da prática pedagógica da pesquisa no laboratório de informática.



Fonte: Próprio autor.

Na questão 5 percebemos como a construção da figura expressa a aplicação direta do teorema do ângulo externo e a agilidade dos estudantes em formar a construção pelo enunciado.

Como pudemos perceber, os estudantes participantes da pesquisa apresentavam dificuldades no início dos trabalhos por não dominarem o conteúdo do teorema do ângulo externo a ponto de resolver problemas que necessitasse de sua aplicabilidade mesmo no ambiente VPC. Todavia, ao se apropriar da ferramenta do GeoGebra no ambiente AVA utilizando os mesmos problemas, essas dificuldades passaram a ser enfrentadas e superadas pela facilidade de manuseio com o software que permite utilizar várias tentativas de resolução para um problema sem limites para “errar” e que desta forma o número de possibilidades de encontrar a solução correta é imensa.

5.4 Análise do Uso do Software GeoGebra na Pesquisa

A aplicação das atividades durante a pesquisa conseguiu boa aceitação por parte dos estudantes que fizeram parte dela e que se mostraram interessados em participar e

relataram ter gostado da experiência de trabalhar com o software Geogebra, uma vez que o aplicativo os possibilitou visualizar as figuras, fazer comparações, aprender com seus erros e assimilar de forma dinâmica os conceitos geométricos. Segundo Brousseau (1996, apud CONTIERO e GRAVINA, 2011, p. 9):

O trabalho com o software produz uma situação em que os alunos se engajam nas atividades não mais para atender a exigência do professor, mas movidos por interesse próprio, chamando a si a responsabilidade dos procedimentos de investigação, e desta forma estão dadas as condições para o desenvolvimento de habilidades e atitudes que caracterizam o raciocínio matemático.

Esse engajamento destacado pelo autor foi identificado nos alunos, que se envolveram nas atividades, fizeram questionamentos e tiraram suas próprias conclusões.

Do diálogo realizado com o grupo envolvido, pode-se afirmar que a proposta teve o resultado esperado, os relatos obtidos foram de que os participantes gostaram da metodologia utilizada e conseguiram aprender um pouco mais sobre os conceitos geométricos, fato evidenciado por Albuquerque e Santos (2009, p.3), na afirmação de que o uso de softwares educacionais permite que os alunos “construam e realizem investigações sobre propriedades e conceitos matemáticos manipulando o objeto e seus elementos dinamicamente, na tela do computador, e identifiquem especialmente as características das figuras geométricas”.

Destacamos a seguir, alguns depoimentos dos estudantes participantes da pesquisa após a aplicação do questionário com as questões propostas sobre o teorema do ângulo externo utilizando o software GeoGebra para encontrar a solução.

Depoimentos dos estudantes que se mostraram satisfeitos ao utilizar o software:

Estudante 1: Algumas atividades aplicadas ao software são fáceis de responder;

Estudante 2: É muito importante trabalhar com o software nestas atividades;

Estudante 3: Eu aplicarei essas atividades nas minhas aulas usando o software GeoGebra que é de fácil manuseio;

Estudante 4: É importante para o ensino por que é uma ferramenta que enriquece as aulas e com certeza facilita a aprendizagem.

Depoimentos dos estudantes que embora satisfeitos, apresentaram dificuldades ao usar o software:

Estudante 5: É preciso antes fazer uma análise prévia das atividades para resolver no AVA;

Estudante 6: Terei dificuldade de usar o software em minhas aulas pela falta de computadores na escola em que trabalho;

Estudante 7: Terei muita resistência dos colegas professores de matemática da minha escola em aplicar essas atividades com o uso do GeoGebra.

Para outros estudantes participantes do trabalho, seus depoimentos significaram sugestões para trabalhar o software na prática pedagógica de sala de aula:

Estudante 8: Precisamos trabalhar com o software em nossas aulas para atrair a maior atenção dos alunos. Tenho certeza que o aprendizado deles em matemática será melhor;

Estudante 9: O planejamento de matemática nas escolas deve ser utilizado para dar formação da aplicabilidade do software para resolver problemas diversos dessa disciplina.

No que diz respeito ao estabelecimento de ensino em que o trabalho foi realizado, o espaço proporcionado contribuiu na realização do mesmo e segue contribuindo de forma significativa com o grupo de professores no desenvolvimento das ações planejadas. A receptividade ocorre de forma notória, e todos se mostram animados para a participação das atividades, o que serve como um incentivo para nós acadêmicos.

Neste contexto, a aplicação da pesquisa realizada nos dois ambientes (VPC e AVA) trouxe para os estudantes participantes uma ampla reflexão sobre a metodologia empregada na sala de aula, como ela deve ser elaborada e aplicada, quais resultados apresentam para o aluno uma aprendizagem significativa. Desta forma, conseguimos despertar nos estudantes o gosto pela inovação, o poder da superação e a vontade de ensinar usando novas tecnologias que tornem suas aulas dinâmicas e inovadoras.

Podemos averiguar como ocorreu a aplicação da atividade nos dois ambientes quanto a melhor solução encontrada para o mesmo problema por uma das duplas e concluir qual metodologia foi melhor utilizada para gerar aprendizagem significativa. Tomamos a questão 4 do questionário 2 (Apêndice B) como indicado na figura 22 :

4. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo BÂC é igual a:
 a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

Fonte: próprio autor

De acordo com a figura 23 acima apresentada, a questão 4 não foi resolvida no VPC por algumas das duplas pois não tiveram êxito em seus cálculos para encontrar a solução. Todavia, quando o mesmo problema foi levado para AVA utilizando o software

GeoGebra, percebemos que por utilizar várias tentativas com as ferramentas que o software oferece, foi possível encontrar a resposta correta para a questão. Senão, vejamos a figura 26.

The screenshot shows the GeoGebra interface with a problem statement and a list of construction steps. The problem is: "Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo BÂC é igual a: a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°". The diagram shows an isosceles triangle ABC with base BC and vertex A. Point D is on AC such that AD = BD = BC. The angle at A is labeled as $\alpha = 36^\circ$. The sides are labeled a, b, c, d, e. The construction steps are: 1. Construir um ponto A; 2. Construir o fator deslizante **Texto texto2**; 3. Construir os segmentos a partir do ponto A e do fator deslizante m; 4. Mover os segmentos a formar um triângulo; 5. Construir o fator deslizante n; 6. Construir os segmentos a partir do ponto A e do fator deslizante n; 7. Construir o ângulo desejado.

Fonte: próprio autor

Diante desses argumentos, pudemos concluir que o uso do software GeoGebra potencializou aos estudantes suporte necessário para desempenhar melhorias em suas aulas e atingir os objetivos planejados.

No capítulo que segue, apresentamos as conclusões da pesquisa e sugestões para futuros trabalhos para que possam utilizar as ferramentas necessárias ao ensino de geometria ou outros conteúdos de matemáticas e áreas afins.

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A iniciativa de desenvolver esta pesquisa de campo com o grupo de professores de matemática em formação continuada teve origem na subutilização que as ferramentas do GeoGebra poderiam potencializar a extraírem das experimentações neste ambiente, informações que poderiam compor a argumentação desejada. O interesse maior da pesquisa esteve pautado no fato de que o bom rendimento do trabalho de investigação no software de geometria dinâmica pudesse estar relacionado ao tipo de problema geométrico proposto.

Concluimos nesta pesquisa que quando se trabalha com a metodologia tradicional do ensino de matemática sem o auxílio de um *software* de geometria dinâmica no estudo de conceitos de geometria, nem sempre são dadas aos estudantes oportunidades de concluir suas próprias inferências, tornando isso desfavorável à aprendizagem significativa. Porém, com a utilização do software, percebemos o quanto é possível construir soluções de problemas com as ferramentas que o mesmo oferece e o quanto se consegue aprender mais sobre o seu desenvolvimento, estrutura e manuseio.

Partindo da análise qualitativa e quantitativa dos dados coletados através das observações nas atividades realizadas, registros em diário de bordo durante os encontros do grupo e conclusões da pesquisa bibliográfica, concluimos que o trabalho apresentou respostas aos questionamentos propostos nas hipóteses levantadas e atingiu o objetivo principal com a finalidade de potencializar e conceber sessões didáticas relacionadas ao teorema do ângulo externo para um curso semipresencial da modalidade à distância com o uso do GeoGebra.

Para os estudantes que fizeram parte da pesquisa, concluimos que estes ainda faz pouco uso da ferramenta computacional como suporte de apoio pedagógico, para auxiliá-los na construção de seus planos de aulas e aprimorar juntos com seus alunos a busca de soluções de problemas geométricos que parecem difíceis algebricamente no ambiente papel e lápis, mas que se tornam fáceis geometricamente com o auxílio do software GeoGebra. Neste sentido, professores e alunos podem usar o computador dos laboratórios de informática de suas escolas para ampliar seus horizontes e possibilidades através da metodologia utilizada neste trabalho com a finalidade desenvolver melhorias no estudo de geometria do currículo escolar.

Levando em consideração as abordagens e procedimentos técnicos da pesquisa, percebemos a importância de se realizar uma pesquisa exploratória que de acordo com Gil, visa proporcionar maior familiaridade com o problema com objetivo de torná-lo explícito ou a

construir hipóteses. Neste sentido conseguimos atingir o objetivo de solucionar problemas específicos para então gerar novos conhecimentos e potencializar os professores em formação continuada a utilizar metodologias que mostrem uma estreita associação com a uma ação ou resolução de um problema de interesse coletivo com a participação cooperativa dos participantes.

Ao propor a presente dissertação, o professor pesquisador conseguiu absorver uma visão diferenciada quando na mediação de aulas com os estudantes nos ambientes VPC e AVA com o uso pedagógico do computador no ensino de matemática utilizando o software GeoGebra. Percebemos que as atividades realizadas no VPC deixaram os estudantes muito presos à fundamentação conceitual do teorema do ângulo externo e a busca da solução ocorria de forma mecânica, orientada pelas manipulações algébricas para finalizar na solução. Com a ferramenta pedagógica GeoGebra utilizada para encontrar a solução dos problemas de Geometria através de recursos geométricos de sua interface, foi possível aos estudantes desenvolverem habilidades de análise e interpretação das informações contidas nas representações analíticas e geométricas do teorema do ângulo externo e poder construir soluções após uma quantidade ilimitada de erros na interface do software.

A relação VPC e AVA com atuação do GeoGebra foi uma experiência exitosa que potencializou os estudantes participantes da pesquisa inferir sobre suas práticas pedagógicas de sala de aula para que possam utilizar ferramentas que realmente forneça a aprendizagem significativa de seus alunos.

Por fim, com a realização desta pesquisa, tem-se a expectativa de que, a partir dos procedimentos relatados, das discussões ocorridas e dos resultados apresentados, seja possível sua exploração por professores de matemática do sistema de ensino do Brasil tanto nas suas aulas para alunos de nível médio como na formação inicial de professores dos cursos de graduação de licenciatura em matemática.

Deixamos como sugestão para futuros trabalhos: a extensão da metodologia aplicada neste trabalho para a sala de aula em outras áreas do conhecimento; utilização do computador de forma adequada através dos recursos computacionais (softwares educativos) como ferramenta de apoio pedagógico para o desenvolvimento de práticas pedagógicas; elaboração de questionários com questões discursivas sobre o conteúdo de geometria plana (o teorema do ângulo externo) para diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes participantes e intervir em sua prática de sala de aula de forma a ampliar os conhecimentos e res-significar o ensino.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Maria E. B. **Educação à distância na internet: abordagens e contribuições dos ambientes digitais de aprendizagem.** 2003. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ep/v29n2/a10v29n2.pdf>>. Acessado em 09 mar. 2007.
- ARBACH, N. **O Ensino de Geometria Plana: o saber do aluno e o saber escolar.** Dissertação Mestrado em Educação Matemática PUC/SP, 2002.
- ARTIGUE, Michèle. **Ingenharía Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.** Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. Bogotá, 1995.
- BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas.** São Paulo: Editora da UNESP, 1999, p. 59 – 74.
- BORBA, M. C.; SANTOS, S.C. **Educação Matemática: Propostas e Desafios.** Eccos – Revista Científica, São Paulo, v. 7, n.2, p.291 – 312, jul./dez. 2005.
- CARARO, Lenoar Eloi e SOUZA, José Ricardo, Trabalho com alunos da 6ª série: **Contribuições da Geometria Plana no Aprendizado de Matemática,** Paraná, 2008.
- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. **PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.144 p.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática.** 16. Ed. Campinas, SP: Papirus, 2008. - (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).
- FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. **Iniciação à investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP. Autores associados, 2006.
- FILLOUX, J. (1974). **Du contract pédagogique, le discours inconscient de l'école.** Paris: Dunod.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** São Paulo: Atlas, 1991.
- GIL, Karen Henn, LIMA,Valderez Marina do Rosário e LAHM, Regis Alexandre. **Trabalhando noções de Geometria Plana com o Google Earth.** Revista: Experiências em Ensino de Ciências V.7, No.1[2012]. PUCRS, Porto Alegre/RS.
- GOLDENBERG, E. P.; SCHER, D.; FEURZEIG, N. What lies behind dynamic interactive geometry software? In: BLUME, G. W.; HEID, M. K. (Ed.). **Research on technology and the teaching and learning of matematics: cases and perspectives.** Charlotte: Information Age, 2008. v. 2. p. 53-88.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese de Doutorado em Informática na Educação. UFRGS, 2001, 260 p

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA L. M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. In: Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, IV, 1998, Brasília. Acta...Brasília, 1998.

IMENES, Luiz Marcio e LELLIS, Marcelo, **Livro Didático de Matemática**, 7ª série, São Paulo, Scipione, 2001.

LORENZATO, Sérgio. **“Por que não ensinar geometria?”**. In: *A Educação Matemática em revista*. SBEM. Nº 4. 1º semestre de 1998. pp.30-31.

MIORIN, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MORAN, José Manuel. **Novos Caminhos do Ensino a Distância**. Informe CEAD, Rio de Janeiro, ano 1, n.º 05, out./dez., 1994.

MOORE, Michael; KEARSLEY, Greg. **Educação a Distância: uma visão Integrada**. 1ª São Paulo: Cengage Learning, 2007.

NASCIMENTO, Karla Angélica Silva. Dissertação – **Formação continuada de professores do 5º ano: contribuição de um software educativo livre para o ensino de geometria**. Fortaleza, 2007.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa**/ Luiz Carlos Pais. – 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002

RIBEIRO, A. **Tecnologias na sala de aula: uma experiência em escolas públicas de Ensino Médio**. Regattieri, Brasília: UNESCO, MEC, 2007.

SOUTO, Monica. **Resolução de problemas geométricos no GeoGebra**. 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra, ISSN 2237- 9657, pp.100-114, 2012.

SANTANA, J. R. . **As tecnologias educacionais na perspectiva do ensino de ciências sociais e humanas: ideias fundamentais sobre as engenharias pedagógicas e didáticas**. In: Vinícios Rocha de Souza; Vera Maria Soares Fick. (Org.). *Epistemologias e tecnologias para o ensino de ciências humanas e sociais*. 1ed.Fortaleza-CE: Rede MEC - Instituto UFC Virtual - Núcleo Humanas, 2010, v. 1, p. 27-40.

VALENTE, J. A. **Por que o Computador na Educação**. In *Computadores e Conhecimento: repensando a educação*. Campinas, São Paulo: Gráfica da UNICAMP. 1993

VEIGA, Cinthia Greive. **História da educação**. São Paulo: Ática, 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário da primeira etapa da prática pedagógica

QUESTIONÁRIO PARA RECONHECIMENTO DO PERFIL DOS PROFESSORES

Neste apêndice reproduzimos o questionário realizado com os estudantes que participaram da pesquisa para inferir os conhecimentos prévios sobre a temática da pesquisa.

1º parte: IDENTIFICAÇÃO DO INFORMANTE

01. Qual a sua idade?

até 20 anos 21 a 25 anos 26 a 30 anos 31 a 35 anos mais de 36 anos

02. Sexo?

Masculino Feminino

03. Onde você mora? (indicar se zona urbana ou rural)

04. Você trabalha como professor?

Sim Não

05. Há quanto tempo exerce a função de professor?

06. A escola em que trabalha pertence a qual das redes de ensino?

pública particular ambas as redes

07. Encontra alguma dificuldade para ensinar Matemática na sua escola? Quais?

08. Você tem algum interesse em desenvolver um trabalho que vise à melhoria do ensino de Matemática? Que tipo de trabalho?

2ª parte: CONHECIMENTOS EM GEOMETRIA

09. Você fez alguma disciplina de Geometria Plana durante o Curso de Licenciatura?

Sim Não

10. Qual o nome da disciplina?

11. Qual o domínio que você tem com os estudos de geometria plana?

Total Parcial Nenhum

12. Você conhece o Teorema do Ângulo Externo?

Sim Não

13. Você já fez alguma demonstração do Teorema do Ângulo Externo para seus alunos?

Sim Não

14. Quais os conhecimentos elementares de Geometria que você acha necessário para demonstrar o Teorema do Ângulo Externo?

15. Reconhece uma representação geométrica do Teorema do Ângulo Externo?

Sim Não

16. Quais as maiores dificuldades de compreensão nos estudos do Teorema do Ângulo Externo?

17. Quais as ferramentas utilizadas por você para ensinar geometria plana na sala de aula?

3ª parte: COMPUTADOR COMO PRÁTICA PEDAGÓGICA

18. Você tem computador para uso diário em casa ou na escola?

casa escola

19. Tem domínio da informática básica?

Total Parcial Nenhum

20. Utiliza o computador como ferramenta pedagógica da prática de sala de aula?

Sim, sempre Sim, às vezes Sim, dificilmente Nunca

21. Você conhece algum software matemático que te auxilie nas atividades de sala de aula?

Qual(is)?

Sim Não

22. Você tem domínio de algum software matemático para fins pedagógicos?

Totalmente Parcialmente Nenhum

23. Planeja suas aulas com aplicações do uso do software?

Sim, sempre Sim, as vezes Sim, dificilmente Nunca

24. Você já resolveu algum problema de geometria associado ao Teorema do Ângulo Externo utilizando o ambiente virtual (software)?

Sim Não

25. Qual seu grau de interesse em trabalhar com uma ferramenta computacional (software) para resolver problemas de geometria plana para seus alunos?

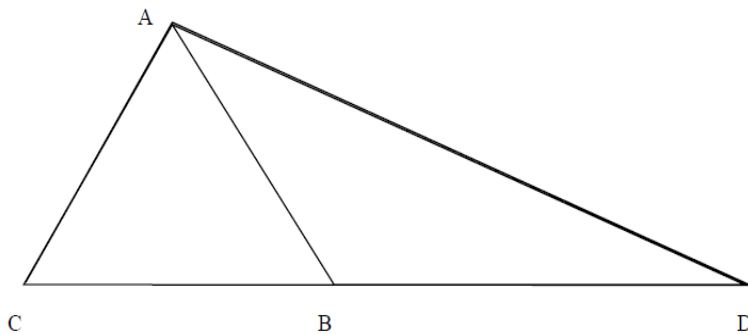
Totalmente Parcialmente Nenhum

APÊNDICE B – Questionário da segunda etapa da prática pedagógica

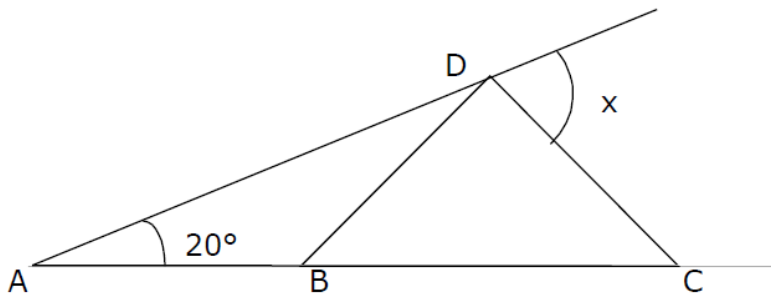
QUESTIONÁRIO DE PROBLEMAS DO TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO PROPOSTOS AOS ESTUDANTES NA SEGUNDA ETAPA DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

Neste apêndice reproduzimos o questionário da segunda etapa da pesquisa aplicada junto aos estudantes participantes da pesquisa com auxílio do software GeoGebra na construção dos conceitos do teorema do ângulo externo com ênfase na representação geométrica da solução dos problemas.

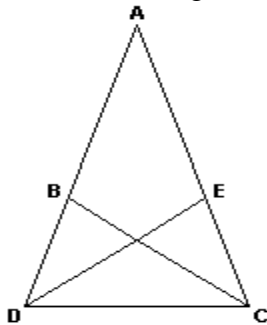
1. No triângulo ABC, isósceles de vértice A, tem-se que a medida do ângulo A é o triplo da medida do ângulo C. Obtenha a medida do ângulo BDA, sabendo que $BD = BA$.



2. Obter o ângulo x , sabendo que $AB = BD = CD$.



3. Na figura ilustrada abaixo, os segmentos AB, BC, CD, DE e EA são congruentes. Determine, em graus, a medida do ângulo CAD.



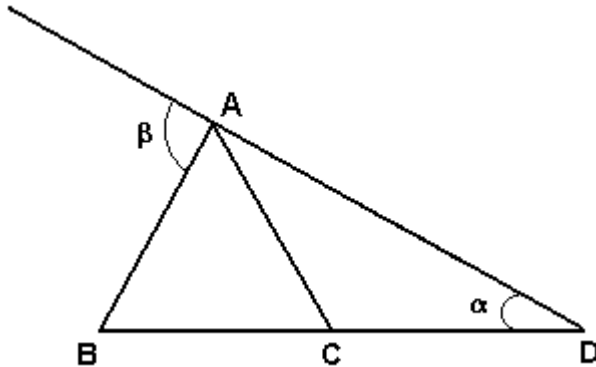
4. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC . Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD , BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $\hat{B}AC$ é igual a:

- a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

5. Na figura a seguir, os segmentos de reta AB , AC e CD são congruentes, β é um ângulo externo, e α um ângulo interno do triângulo ABD .

Assinale a opção que contém a expressão correta de β em termos de α .

- a) $\beta = 3\alpha$ b) $\beta = 2\alpha$ c) $\beta = \alpha/2$ d) $\beta = 2\alpha/3$ e) $\beta = 3\alpha/2$.



APÊNDICE C - Fotos dos alunos durante o percurso da prática pedagógica

FOTOS DOS ALUNOS DURANTE O PERCURSO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA NA SALA DE AULA E NO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA

O apêndice que apresentamos nesta mostra algumas fotografias, que registram alguns momentos das atividades dos alunos na sala de aula e no laboratório de informática da Universidade Estadual do Ceará – Trinus Educação e Cultura pólo de Cascavel na realização da prática pedagógica da pesquisa, planejadas no projeto da Dissertação. Estas atividades envolveram os conteúdos do Teorema do Ângulo Externo e suas Consequências ministradas em sala de aula, com o uso dos ambientes APL escritos e construídos pelos estudantes e AVA operacionado pedagogicamente pelo *software GeoGebra* auxiliando na construção das representações gráficas dos problemas de geometria.

Nas imagens podemos observar momentos de aprendizagens pelos professores estudantes para que os auxiliem nas suas práticas de sala de aula. Pelas fotos é possível perceber situações agradáveis e prazerosas, onde a interação dos estudantes com a interface do *software* possibilitou o desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas. Os professores se mostraram motivados durante todo percurso da prática pedagógica, interessados e predispostos para aprender significativamente.

FOTO 1: Registro fotográfico dos professores-estudantes trabalhando em duplas durante a realização do 3º encontro da prática pedagógica da pesquisa em interação no Velho Papel e Caneta (VPC).



Fonte: Próprio autor.

FOTO 2: Registro fotográfico dos professores-estudantes trabalhando em duplas na resolução do questionário 2 (Apêndice B) durante a realização do 3º encontro da prática pedagógica da pesquisa em interação no Velho Papel e Caneta (VPC).



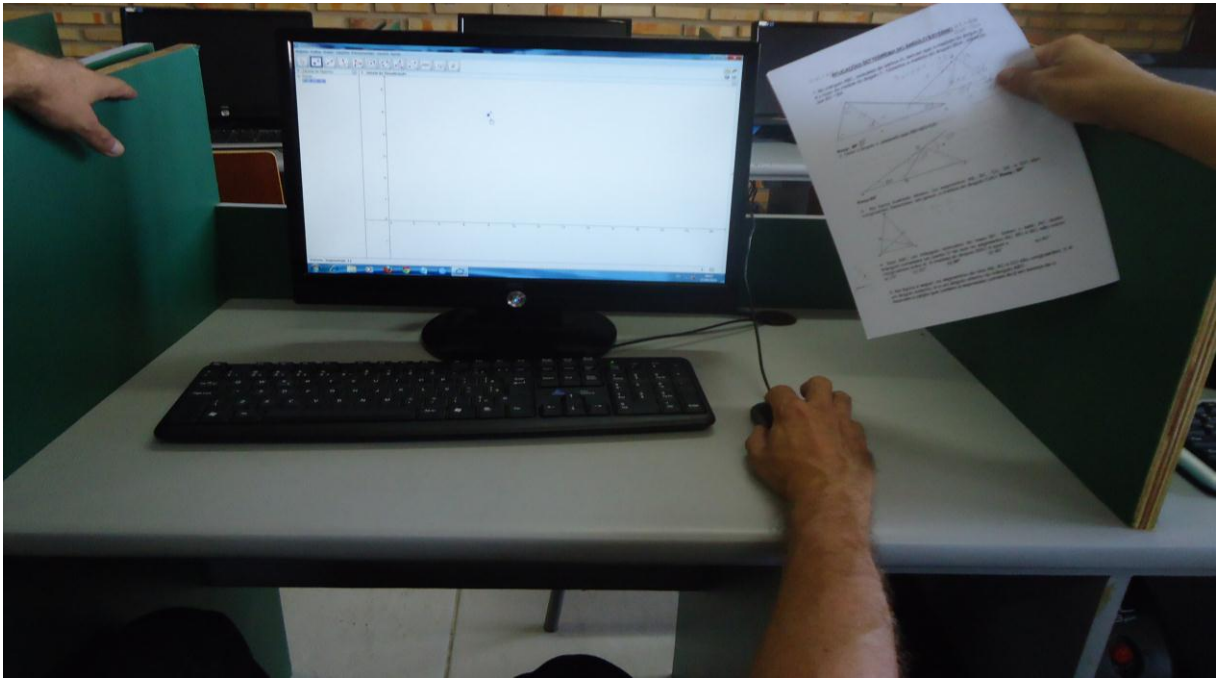
Fonte: Próprio autor.

FOTO 3: Registro fotográfico do Laboratório de Informática da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA da vinculada à Trinus Educação e Cultura de Cascavel onde ocorreu a prática pedagógica da pesquisa no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) com uso do GeoGebra.



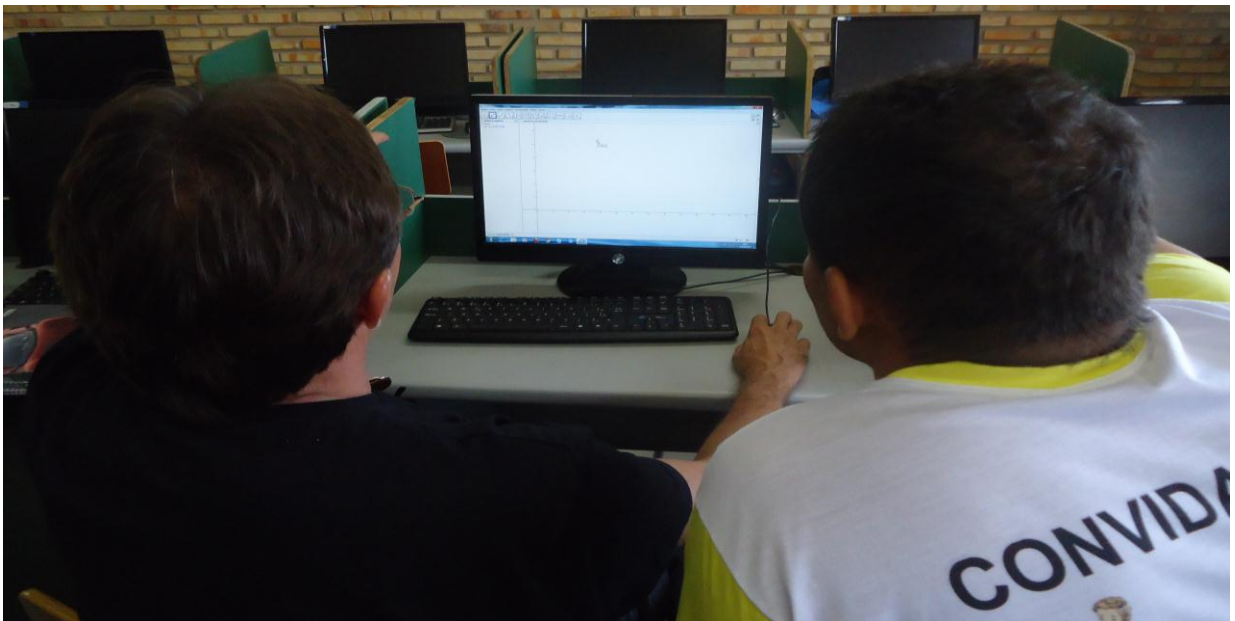
Fonte: Próprio autor.

FOTO 4: Registro fotográfico dos professores-estudantes interagindo em dupla na resolução de questões da pesquisa no laboratório de informática usando o *Software GeoGebra*.



Fonte: Próprio autor

FOTO 5: Registro fotográfico da interface do *Software GeoGebra* mostrados pelos professores-estudantes interagindo para encontrar a solução das questões do questionário 2 (apêndice B) da pesquisa no laboratório de informática.



Fonte: Próprio autor.

ANEXOS

ANEXO A- Guia das aulas da prática pedagógica da pesquisa

GUIA DE AULAS DA PRÁTICA PEDAGÓGICA DA PESQUISA

Neste anexo está a reprodução da mediação realizada na prática pedagógica realizada na pesquisa com os professores em formação continuada em matemática de um curso em EAD da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA com polo em Cascavel-Ce.

Este material tem o objetivo de mostrar através das etapas que compõem a Engenharia Didática redimensionada por Michèle Artigue (1999), todos os passos realizados na pesquisa que constituíram o trabalho da presente dissertação. O propósito é averiguar qualitativamente a utilização de um software educativo de geometria dinâmica, o GeoGebra, aplicado para resolver problemas de geometria plana tendo como foco principal o teorema do ângulo externo analisando o quanto o mesmo proporciona um melhor desempenho no ensino desse conteúdo no cotidiano da sala de aula dos professores. A metodologia que utilizamos se caracterizou como um esquema experimental baseado em sessões didáticas aplicadas ao ensino.

CRONOGRAMA DAS AULAS

◆ Primeira Etapa da Pesquisa

A primeira etapa da pesquisa foi composta de 3 (três) encontros com duração de 4 horas/aulas cada em intervalos de 15 (quinze) dias entre eles.

Primeiro Encontro: Momento reservado para acolhida da turma, apresentação do objeto de estudo e reconhecimento dos sujeitos da pesquisa através da aplicação de questionário com base nos conhecimentos prévios do assunto.

Segundo Encontro: Construção do contrato didático entre o professor-pesquisador e o grupo de estudantes da pesquisa e explanação do conteúdo teorema do ângulo externo realizado pelo professor-pesquisador seguido de atividades para resolução de problemas.

Terceiro Encontro: Revisão do conteúdo aplicado e divisão da turma em grupos de dois estudantes para trabalhar colaborativamente na resolução de questionário com 5 (cinco) problemas no ambiente papel e lápis. Momento de reconhecimento do laboratório de informática para a prática pedagógica com software.

◆ Segunda Etapa da Pesquisa

Quarto Encontro: Apresentação do software GeoGebra e reconhecimento da sua interface (facilidade e dificuldades de manuseio), aplicação do questionário com 5 (cinco) problemas para as mesmas duplas trabalharem no software GeoGebra buscando a solução gráfica dos problemas.

Quinto Encontro: Momento de avaliação dos trabalhos realizados nos dois ambientes e tomadas de decisão para conclusão da pesquisa. Momento também realizado para sugestão de próximos trabalhos.

Descrição das Atividades de cada Encontro da Prática Pedagógica

PRIMEIRO ENCONTRO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

Objetivo: Socializar e motivar o grupo da pesquisa para que possam estabelecer relações de parcerias, comprometer e colaborar entre si. Ouvir o depoimento de cada estudante quanto ao objeto de pesquisa e suas expectativas em fazer parte do trabalho.

Conteúdos:

- Trabalho das relações interpessoais;
- Apresentação do objeto de estudo da pesquisa;
- Motivação e busca para melhoria do ensino de matemática;
- Conversa e depoimentos.

SEGUNDO ENCONTRO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

Objetivo: Identificar as características do grupo da pesquisa, seus conhecimentos prévios e construir um contrato de normas, convivência, disciplina, horários e descontração entre ambos os participantes do trabalho.

Conteúdos:

- Aplicação e análise do questionário;
- Construção do Contrato Didático;
- Aula expositiva sobre o teorema do ângulo externo (professor-pesquisador);
- Resolução de atividades com problemas do assunto.

➤ **Conteúdo da Aula:** Teorema do Ângulo Externo

Em todo triângulo, qualquer o ângulo externo é maior do que os dois ângulos internos que não lhe são adjacentes.

➤ **Atividade proposta:** *Mostrar que a soma das medidas de dois ângulos internos quaisquer de um triângulo, é menor que 180° .*

TERCEIRO ENCONTRO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

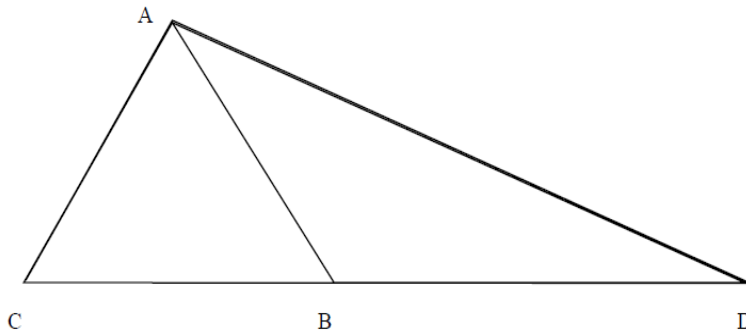
Objetivo: Estruturar o grupo para trabalho coletivo e em duplas e aplicar questionário (lista de problemas) do conteúdo para desenvolver colaborativamente suas conclusões no ambiente papel e lápis (caderno, caneta, lápis, etc.).

Conteúdos:

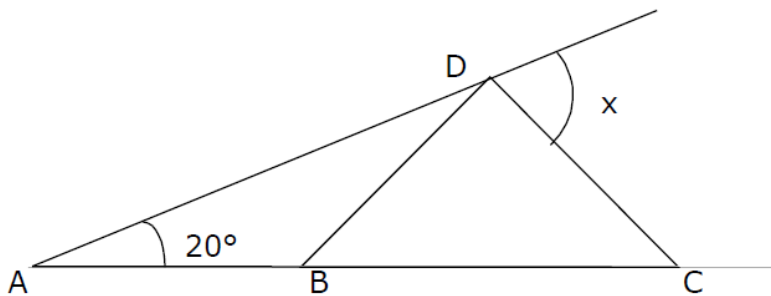
- Revisão do conteúdo teorema do ângulo externo;
- Divisão do grupo em duplas;
- Aplicação da lista de problemas;
- Registro das soluções das duplas.

Atividades: Resolver a lista de problemas no ambiente papel e lápis.

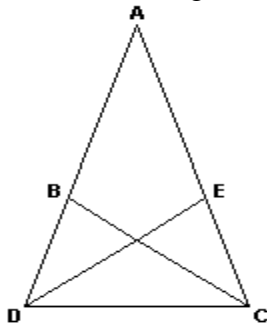
1. No triângulo ABC, isósceles de vértice A, tem-se que a medida do ângulo A é o triplo da medida do ângulo C. Obtenha a medida do ângulo BDA, sabendo que $BD = BA$.



2. Obter o ângulo x , sabendo que $AB = BD = CD$.



3. Na figura ilustrada abaixo, os segmentos AB, BC, CD, DE e EA são congruentes. Determine, em graus, a medida do ângulo CAD.



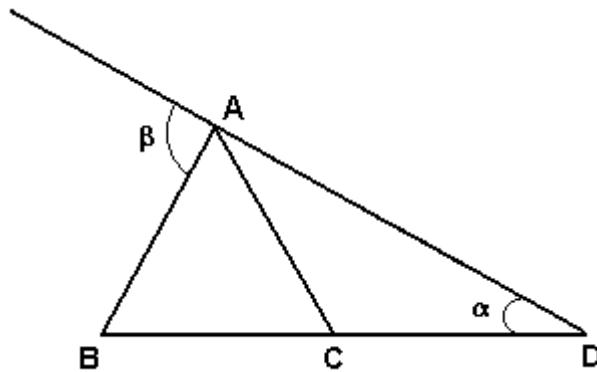
4. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $\hat{B}AC$ é igual a:

- a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

5. Na figura a seguir, os segmentos de reta AB, AC e CD são congruentes, β é um ângulo externo, e α um ângulo interno do triângulo ABD.

Assinale a opção que contém a expressão correta de β em termos de α .

- a) $\beta = 3\alpha$ b) $\beta = 2\alpha$ c) $\beta = \alpha/2$. d) $\beta = 2\alpha/3$. e) $\beta = 3\alpha/2$.



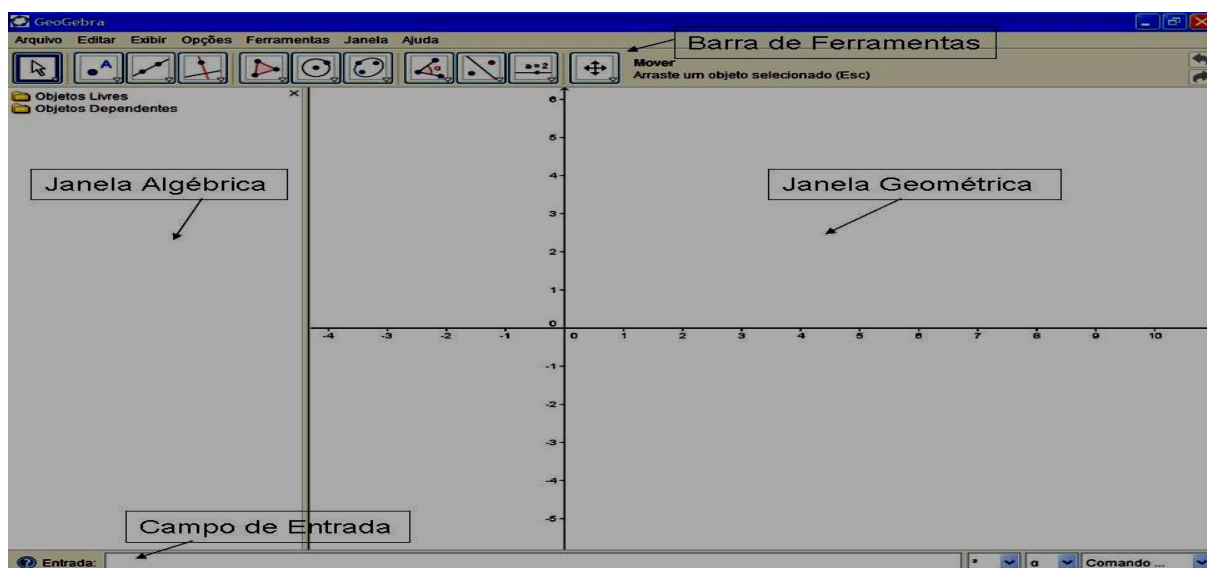
QUARTO ENCONTRO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

Objetivo: Apresentar e desenvolver habilidades com o software GeoGebra para resolver a lista de problemas propostos no encontro anterior, com a finalidade de encontrar soluções gráficas/geométricas no AVA.

Conteúdos:

- Apresentação e manuseio do Software GeoGebra;
- Resolução da lista de problemas no GeoGebra;
- Registro das soluções das duplas.

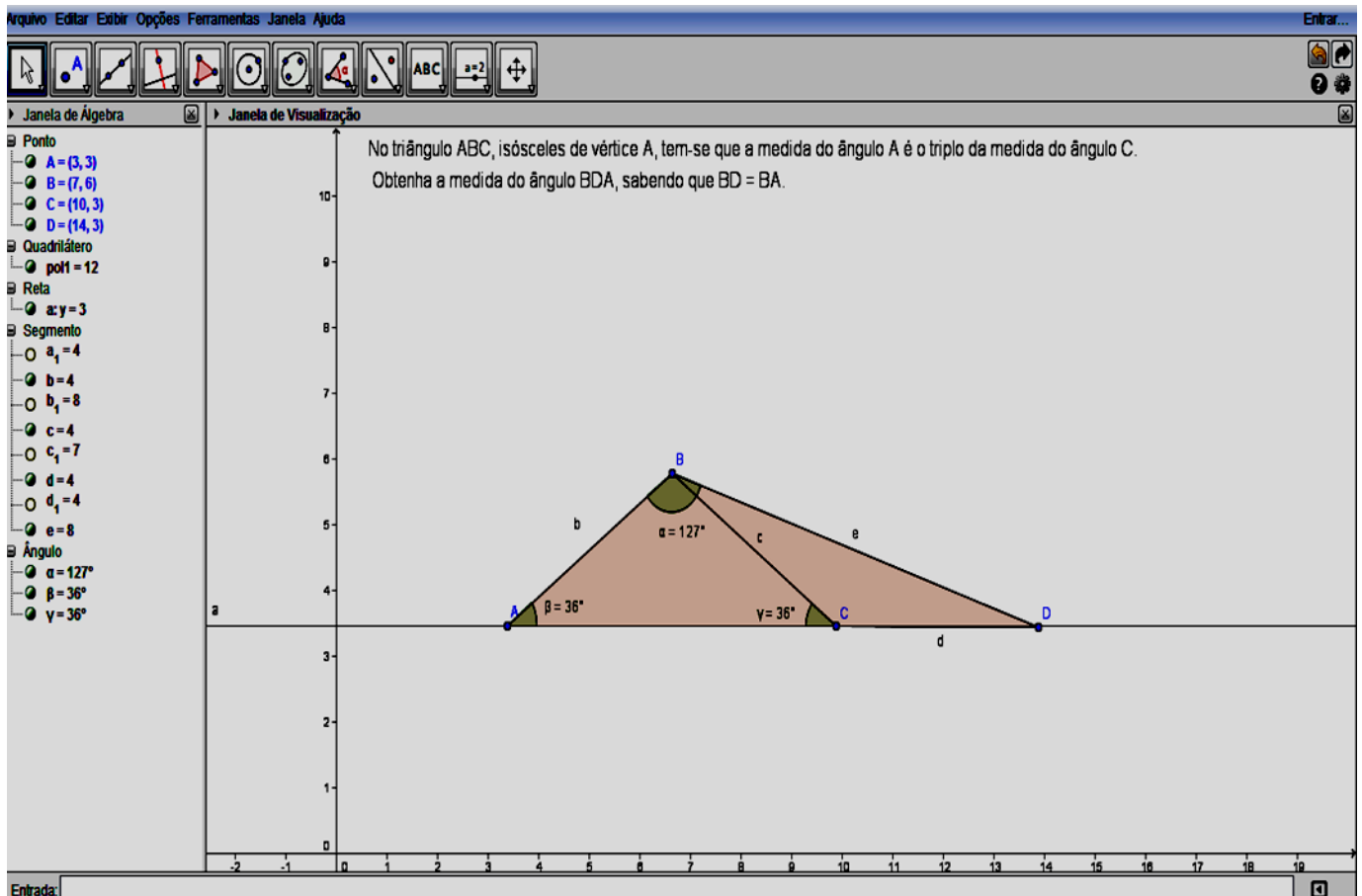
➤ **Conteúdo da aula:** apresentação e manuseio do GeoGebra (interface do GeoGebra)



Fonte: Em <http://www.geogebra.org/cms/>.

Atividade Proposta: No triângulo ABC, isósceles de vértice A, tem-se que a medida do ângulo A é o triplo da medida do ângulo C. Obtenha a medida do ângulo BDA, sabendo que $BD = BA$.

(Solução de uma das duplas)



Fonte: Próprio autor

QUINTO ENCONTRO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

Objetivo: Socializar as soluções encontradas para o questionário nos dois ambientes de aprendizagem e tirar conclusões da prática pedagógica desenvolvida na pesquisa. Sugerir ideias para outros trabalhos.

Conteúdos:

- Socialização das soluções nos ambientes APL e AVA;
- Apresentar as conclusões da prática pedagógica;
- Registrar e sugerir ideias para novos trabalhos.

Socializando a aplicação da atividade nos dois ambientes quanto à descoberta da solução encontrada para o mesmo problema por uma das duplas para então tirarmos conclusões quanto à metodologia utilizada se foi capaz de gerar uma aprendizagem significativa.

Tomamos a questão 4 do questionário 2 (Apêndice B) da figura 22, como parâmetro:

4. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo \widehat{BAC} é igual a:
 a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

Fonte: Próprio autor

De acordo com o que apresentamos no decorrer da pesquisa, a questão 4 não foi resolvida no VPC por algumas das duplas pois não tiveram êxito em seus cálculos para encontrar a solução. Todavia, quando o mesmo problema foi levado para AVA utilizando o software GeoGebra, percebemos que ao usar as ferramentas que o software oferece após várias tentativas, foi possível encontrar a resposta correta para a questão. Senão, vejamos a figura 26.

The screenshot shows the GeoGebra interface with the following elements:

- Top Menu:** Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela, Ajuda.
- Toolbox:** Includes tools for point, line, circle, angle, and triangle construction.
- Algebra View (Left):** Lists objects such as points A(6,7), B(5,3), C(7,3), D(7,4), E(5,3), F(7,3); segments a=4, a1=3, b=4, c=3, d=3, e=3, e1=4, f=4; and an angle alpha=36°.
- Visualization View (Right):**
 - Text: "Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo \widehat{BAC} é igual a: a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45° "
 - Diagram: A triangle ABC with base BC. Point D is on AC. Segments AD, BD, and BC are marked as congruent. Angle A is labeled as $\alpha = 36^\circ$. Sides are labeled a, b, c, d, e.
 - Construction steps:
 1. Construir um ponto A;
 2. Construir o fator deslizante **Texto texto2**;
 3. Construir os segmentos a partir do ponto A e do fator deslizante m;
 4. Mover os segmentos a formar um triângulo;
 5. Construir o fator deslizante n;
 6. Construir os segmentos a partir do ponto A e do fator deslizante n;
 7. Construir o ângulo desejado.

Fonte: Próprio autor.